Profesor: José Soto, jsoto@dim.uchile.cl

Índice general

Capítulo 0

Prefacio

Este texto surge a partir de las clases del Curso de Combinatoria realizadas los años 2014, 2015, 2016, 2018 y 2019 en la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile, y puede ser usado como un apunte o guía de referencia. El texto está en gran medida basado en la versión del curso dictada por Martín Matamala y por mí en años anteriores, complementado con material creado para cursos para profesores de educación media en combinatoria en conjunto con el CMAT (campeonato nacional de matemática) de Chile. Incluye bastante material a modo de referencia, no necesariamente visto en clase, sino que discutido con alumnos y auxiliares fuera de clase.

El material está pensado para ser usado por alumnos de pregrado que ya hayan alcanzado cierta madurez matemática o alumnos iniciando su posgrado. El ritmo del apunte es mucho más lento que el ritmo de un curso completo – en una clase es posible cubrir muchas páginas de material– esto es particularmente cierto para las secciones introductorias. No obstante lo anterior, gran parte del material puede ser adaptado a un nivel avanzado pre-universitaria.

Una advertencia: muchos de los ejemplos iniciales de cada sección son rudimentarios y simples. Estos no deben ser usado como una medida de la dificultad de los problemas que pretendemos atacar, sino más bien como una forma de *digerir* nociones nuevas.

Este borrador contiene con alta probabilidad errores de tipeo y formato. Si encuentra alguno por favor comuníquelo al correo electrónico jsoto@dim.uchile.cl.

José A. Soto.
Julio 2019.

Capítulo 1

Cardinalidad.

La Combinatoria es un área de la Matemática muy amplia a la que se le asocia el estudio de *estructuras finitas* o *discretas*. Aspectos de la Combinatoria incluyen *contar* estructuras de cierto tipo o decidir su *existencia*. En estas notas nos enfocaremos en problemas de *combinatoria enumerativa*. Es decir, problemas relacionados con determinar la cardinalidad de conjuntos de objetos. Supondremos conocidas estructuras básicas en Matemática: conjuntos, funciones y relaciones. Asimismo, usaremos elementos básicos de álgebra, cálculo y probabilidades, sin llegar a ser estos requisitos fuertes. Cada vez que necesitemos notación especial la definiremos.

1.1. Conjuntos, secuencias y palabras.

Definición 1.1 (Conjuntos típicos)**.** $\mathcal{P}(X) = \{A \colon A \subseteq X\}$ denota al conjunto potencia del conjunto X. Usamos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ para denotar a los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos respectivamente. Para $n \in \mathbb{N}$, denotamos $[n] = \{j \in \mathbb{N} \colon 1 \leq j \leq n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $\mathbb{N}_n = \{j \in \mathbb{N} \colon j < n\} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. En particular, $\mathbb{N}_0 = [0] = \emptyset$. Finalmente, el super-índice $+$ indica restricción a números reales positivos ($\mathbb{N}^+ = \mathbb{Z}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{R}^+$).

Definición 1.2 (Corchete de Iverson)**.** La expresión $[\![P]\!]$ vale 1 si P es una proposición verdadera, y vale 0 en otro caso.

Esta notación es muy versátil. Por ejemplo, la función $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \text{ es par,} \\ x & \text{si } x \text{ es impar,} \end{cases}$ se puede escribir como $f(x) = x + 2[\![x \text{ es par}]\!]$. La primera forma de definir f es mejor en claridad, mientras que la segunda es más compacta. Por convención evaluamos a 0 todos los productos de tipo $[\![F]\!] \cdot J$, donde J es cualquier cosa (incluso algo indefinido o sin sentido) y F es falso. Por ejemplo, para todo $a \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ se tiene la igualdad:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = [\![a \neq 1]\!] \frac{a^n - 1}{a - 1} + [\![a = 1]\!](n+1),$$

donde el primer término para el caso $a = 1$ es 0 por un término indefinido.

El corchete de Iverson también permite manipular sumas múltiples con facilidad:

$$\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{i} j = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} j[\![j \leq i]\!][\![i \leq N]\!] = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} j[\![j \leq i \leq N]\!] = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} j[\![j \leq N]\!][\![j \leq i \leq N]\!] = \sum_{j=0}^{N} j \sum_{i=j}^{N} 1.$$

Para evitar sobrecargar notación de sumas, siempre supondremos que el índice a sumar pertenece a los naturales (de no ser así, lo indicaremos). Por ello, si el límite inferior es 0, se omitirá. Así,

$$\sum_{i} a_i := \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i; \quad \sum_{i}^{k} a_i := \sum_{i=0}^{k} a_i.$$

Trabajaremos bastante con secuencias y palabras, que formalizamos a continuación.

Definición 1.3 (Alfabeto, secuencias y palabras). Sea Σ un conjunto cualquiera llamado *alfabeto* cuyos elementos se llaman *símbolos, letras o dígitos*. Una *secuencia* sobre Σ, de largo $k \in \mathbb{N}$, es una función $w\colon [k] \to \Sigma$, donde usamos la notación w_i en vez de $w(i)$ para la evaluación de w en i. Llamamos Σ^k al conjunto de todas las secuencias de largo k. Usamos *notación de secuencias* $w = (w_1, \dots, w_k)$ o *notación de palabras* $w = w_1 w_2 \cdots w_k$ para referirnos a un objeto $w \in \Sigma^k$.

Observación 1.4. La notación de palabras es, solo eso, una notación y como tal puede ser ambigua. Por ejemplo, si por mala suerte, nuestro alfabeto fuera $\Sigma = \{a, aa\}$, entonces no es claro si aa se refiere a la palabra de largo 1 (aa) o a la palabra de largo 2 (a, a). Para evitar esto, solo usaremos alfabetos con símbolos cuya escritura no admita confusiones como esta.

Definición 1.5 (Palabra vacía). Denotamos a la palabra vacía, i.e., al único elemento de Σ^0, por ε.

Observación 1.6. Un detalle muy técnico respecto a funciones y palabras. Usualmente dos funciones con distinto codominio se consideran distintas incluso si tienen igual asignación, sin embargo para el caso de palabras se considerarán iguales. Por ejemplo la palabra $w = ab$ puede verse como una función $w\colon [2] \to \{a, b\}$ sobre el alfabeto $\{a, b\}$ o como una función $w\colon [2] \to \{a, b, c\}$ sobre un alfabeto más grande. En rigor, ambas funciones son distintas, pero nosotros las consideraremos iguales. Así, por ejemplo, la palabra vacía ε resulta ser única independiente del alfabeto utilizado.

Por ejemplo, si $\Sigma = \{a, b, c, d\}$, se tiene que $aba \in \Sigma^3$, $cada \in \Sigma^4$, etc. Además, es importante aclarar qué pasa para $\Sigma = \emptyset$. En dicho caso,

$$\emptyset^k = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } k \geq 1. \\ \{\varepsilon\}, & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

Definición 1.7 (Conjunto de palabras. Lenguajes). El conjunto de todas las palabras sobre Σ se denota por Σ^*. Luego,

$$\Sigma^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Sigma^k.$$

Denominamos *lenguaje* sobre Σ a todo conjunto de palabras, es decir a todo subconjunto de Σ^*. Denominamos *subalfabeto* a todo subconjunto de Σ.

Definición 1.8 (Largo, concatenación, potencias). Si $w \in \Sigma^*$, denotamos al largo de w como $|w|$. Dadas dos palabras $w, w' \in \Sigma^*$, podemos definir su concatenación como la palabra $ww' \in \Sigma^*$, que tiene largo $|w| + |w'|$. Notamos que concatenar es una operación asociativa y no conmutativa, con elemento neutro la palabra vacía ε. Identificamos Σ^1 con Σ, es decir no hacemos diferencia entre un símbolo y la palabra que tiene dicho símbolo. Usamos notación de potencia ($w^0 = \varepsilon; w^k = w^{k-1}w$, para $k \geq 1$) para concatenación iterada. Por ejemplo: $(01^30)^2 = 0111001110$ y $ab^0a = aa$. Como estructura algebráica, Σ^* con la operación concatenar es el monoide libre sobre Σ.

Definición 1.9 (Concatenación de lenguajes). Dados dos lenguajes B y C sobre el mismo alfabeto Σ,

$$B \circ C = BC = \{bc \colon b \in B, c \in C\}$$

denota al lenguaje que contiene todas las concatenaciones de palabras de B con palabras de C. Usaremos la notación $B^{\circ k}$ para denotar la concatenación iterada de un lenguaje B consigo mismo k veces y llamamos $B^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B^{\circ k}$. (Notamos que $\Sigma^k = \Sigma^{\circ k}$ por lo cual no hay confusión al escribir Σ^*).

Definición 1.10 (Concatenación de subalfabetos corresponde a producto de conjuntos)**.** Sean $A_1, \ldots, A_k$ una secuencia de subconjuntos de un alfabeto Σ. Se define su **producto** como su concatenación, es decir como el lenguaje que contiene todas las palabras sobre Σ, de largo k, tal que su i-ésimo símbolo está en A_i. Es decir,

$$\prod_{i=1}^{k} A_i = \{w \in \Sigma^k \colon w_i \in A_i, \forall i \in [k]\}.$$

Recordando que las palabras son secuencias, $\prod_{i=1}^{k} A_i$ corresponde a la definición clásica de producto finito de conjuntos, donde el alfabeto es la unión de los conjuntos que participan del producto.

Observación 1.11. ¡Cuidado! la concatenación de lenguajes y el producto de lenguajes pueden ser diferentes. Por ejemplo, si $\Sigma = \{a\}$ y $A = \{a, aa\}$ entonces $\prod_{i=1}^{2} A = A \times A = \{(a,a),(a,aa),(aa,a),(aa,aa)\}$ tiene 4 elementos pero $A \circ A = \{aa, aaa, aaaa\}$ tiene 3 elementos.

Siempre será importante detenernos a entender *para que valores de* k tiene sentido la definición anterior. Ciertamente tiene sentido para $k \geq 1$. El caso $k = 0$ se ve un poco extraño:

$$\prod_{i=1}^{0} A_i = \{w \in \Sigma^0 \colon w_i \in A_i, \forall i \in [0]\} = \{\varepsilon\}.$$

En otras palabras el producto vacío de conjuntos resulta tener un elemento: la palabra vacía.

Observación 1.12. Si todos los A_i son iguales a un conjunto dado, digamos $A \subseteq \Sigma$, entonces se obtiene la siguiente propiedad natural. Para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\prod_{i=1}^{k} A = A^k.$$

1.2. Cardinales finitos y principio biyectivo.

Cuando le pedimos a alguien que *cuente* los elementos de un conjunto probablemente ella comenzará a marcar cada elemento asociando a cada elemento marcado un número: *uno, dos, tres,*... hasta terminar con los elementos. De seguro responderá que la cantidad de elementos corresponde al último número, digamos n, dicho[1]. En consecuencia, lo que en verdad está haciendo esta persona es encontrar una correspondencia entre los objetos a contar y un conjunto básico y conocido de referencia (el conjunto $[n]$). Este proceso se puede hacer ciertamente sin necesidad de usar $[n]$ como conjunto de referencia: Un niño pequeño puede contar antes de saber los nombres de los números. Por ejemplo, en vez de decir la cantidad de elementos, levantará *tantos dedos* como elementos ha visto.

Así, vemos que la definición más básica para contar no es la de “declarar una cantidad” sino más bien la de “poner en correspondencia dos conjuntos”.

Definición 1.13. Equipotencia. Dos conjuntos A y B se dicen *equipotentes* o *equinumerosos* si existe $f \colon A \longrightarrow B$ función biyectiva. Anotamos en este caso $|A| = |B|$. También decimos (informalmente) que A y B tienen el mismo número de elementos.

Otra forma de interpretar la definición de equipotencia es la siguiente

Definición 1.14. Principio Biyectivo. Probar que dos conjuntos tienen el mismo número de elementos equivale a encontrar una biyección entre ambos.

[1] Si no alcanza a decir nada, entonces responderá que hay cero elementos.

Observación 1.15. Ser equipotente es relación[2] de equivalencia (pruébelo como ejercicio). Luego también se puede probar que dos conjuntos son equipotentes exhibiendo un tercer conjunto que sea equipotente con ambos.

Notamos que en la definición de equipotencia, la expresión $|A|$ por si sola no significa nada; pero la expresión $|A| = |B|$ significa que hay una biyección de A en B. Deseamos también poder declarar cuantos elementos tiene un conjunto. Para esto usamos la siguiente definición.

Definición 1.16. Cardinales finitos.

Sea A conjunto y $n \in \mathbb{N}$. Escribimos $|A| = n$ si $|A| = |\,[n]\,|$ y decimos en este caso que *el cardinal* de A es n. Decimos que el conjunto A es *finito* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|A| = n$. De otro modo decimos que A es infinito.

Observación 1.17. Para que la expresión $|A| = n$ esté bien definida, es necesario probar que n es el único número natural para el cual $|A| = |\,[n]\,|$. De otra forma la notación deja de ser útil ya que podríamos tener que $|A| = n \neq m = |A|$. Dejamos esta demostración como ejercicio (Ejercicio 1.2) al final de la sección.

Informalmente, $|\cdot|$ es una función "cardinalidad" cuyo valor está bien definido para conjuntos finitos.

Comentario 1.18. La definición anterior de cardinal como función es poco rigurosa y no es útil para cardinales infinitos. Otra solución, un poco mejor, es considerar a la equipotencia es una relación de equivalencia y que $|A|$ es la clase de A para esta relación.

Observación 1.19. Al decir que A tiene n elementos, estamos afirmando que existe una biyección $a\colon [n] \to A$, y luego, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Decimos que a enumera A.

Veamos un par de ejemplos para ejercitar las nociones anteriores.

Ejemplo 1.20. Sean $A_1, \ldots, A_k$ conjuntos con $k \geq 2$, y $A = \bigtimes_{i=1}^{k} A_i = (\ldots((A_1 \times A_2) \times A_3) \times \ldots) \times A_k$. Pruebe que $|A_1 \times A_2| = |A_2 \times A_1|$ y que $|A| = |\prod_{i=1}^{k} A_i|$.

Solución. Use la biyección $A_1 \times A_2 \to A_2 \times A_1$, dada por $(a, b) \mapsto (b, a)$. Para el segundo ejemplo usamos la biyección que asigna $((((a_1, a_2), a_3), \ldots), a_k) \mapsto (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ □

La biyección anterior entre producto cartesiano y producto es la que justifica escribir $A \times A \times A = A^3$.

Ejemplo 1.21. Pruebe que $|\mathbb{N}_n| = n$.

Solución. En efecto, la función $\mathbb{N}_n \to [n]$ dada por $i \mapsto i + 1$ es biyectiva (su inversa es $j \mapsto j - 1$). □

Ejemplo 1.22. En un campeonato de fútbol juegan n equipos en una modalidad de eliminación: cada vez que un equipo pierde un partido, sale del campeonato. Además, cada partido debe tener un ganador y un perdedor (no hay empates). ¿Cuál el número mínimo y máximo de partidos que se deben jugar para que quede un solo equipo no eliminado?

Solución. La pregunta está formulada de manera que no entregue pistas hacia su solución. La verdad es que la respuesta es que se deben jugar exactamente $n - 1$ partidos. Para ver esto, basta notar que existe una biyección entre el conjunto de partidos jugados y el conjunto de equipos eliminados (hay un perdedor por cada partido que es eliminado, y estos no se pueden repetir). Por lo tanto si deseamos que hayan $n - 1$ eliminados, deberán jugarse $n - 1$ partidos. □

[2] No se preocupe sobre cual es el conjunto maximal (¡no hay!) donde esta relación está definida, esto es tema para otro curso.

El ejemplo anterior muestra lo simple y curiosamente útil que es el principio biyectivo. Otro ejemplo similar se encuentra en el Ejercicio 1.1 al final de este capítulo.

1.3. Principio Inyectivo y Principio Sobreyectivo

Primero enunciamos un resultado auxiliar simple de probar:

Lema 1.23. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, si $X \subseteq [n]$ entonces X es finito y $|X| \leq n$.*

Demostración. Como el único subconjunto de $[0] = \emptyset$ es $[0] = \emptyset$ que es finito, el resultado vale para $n = 0$. Sea $n \geq 1$, y sea $X \subseteq [n]$. Si $X = [n]$ entonces $|X| = n$ y X es finito. Si $X \subseteq [n-1]$ entonces, por inducción, X es finito y $|X| \leq n-1$. El caso restante es que $n \in X \subsetneq [n]$, luego debe existir $a < n$, $a \notin X$. Sea $Y = X \setminus \{n\} \cup \{a\}$. La biyección $f: X \to Y$ dada por $f(n) = a$ y $f(x) = x$ para todo $x \in X \setminus \{n\}$ muestra que $|X| = |Y|$. Por otro lado $Y \subseteq [n-1]$, Y es finito. Por lo tanto X es finito y $|X| = |Y| \leq n-1$. □

Proposición 1.24 (Principio Inyectivo)**.** *Sean A y B conjuntos donde B es finito.*

A es finito y $|A| \leq |B|$ si y solo si existe una inyección de A a B.

Demostración. ($\Rightarrow$) Sean $n = |A| \leq |B| = m$ y $f: A \to [n] \subseteq [m]$, $g: [m] \to B$ biyecciones. Su composición $h: A \to B$ dada por $h(x) = g(f(x))$ es inyectiva.

($\Leftarrow$) Sea $h: A \to B$ una función inyectiva y sea $g: B \to [m] = |B|$ una biyección. Luego $f = g \circ h: A \to [n]$ es inyectiva. Como f es biyección entre A y $f(A) \subseteq [n]$, tenemos del lema anterior que $|A| = |f(A)| \leq n = |B|$. □

Comentario 1.25. El principio inyectivo enunciado anteriormente para cardinales finitos, se entiende como una *definición* para cardinales generales: $|A| \leq |B|$ se define como la existencia de una función inyectiva de A en B.

Otra forma de interpretar el principio anterior es el siguiente.

Proposición 1.26. ***(Principio Inyectivo) (informal)*** *Para probar que un conjunto tiene una cantidad menor o igual de elementos que otro, basta encontrar una inyección del primer conjunto al segundo. En particular, si se encuentra una inyección de A en B, y una inyección de B en A, entonces A y B tienen el mismo cardinal.*

Comentario 1.27. La última afirmación también es cierta para conjuntos infinitos, y se conoce como el Teorema de Cantor-Schröder–Bernstein (este teorema no requiere del axioma de elección).

Una variante del principio anterior es la siguiente

Proposición 1.28 (Principio Sobreyectivo)**.** *Sean A y B conjuntos donde B es finito.*

A es finito y $|A| \leq |B|$ si y solo si existe una función sobreyectiva de B a A.

Demostración. ($\Rightarrow$) Sean $n = |A| \leq |B| = m$ y $f: [n] \to A$ y $g: B \to [m]$ biyecciones. Defina $f': [m] \to A$ como $f'(x) = f(\text{mín}(x, n))$. Como f es sobreyectiva y coincide con f' en $\text{Dom}(f) = [n]$, f' también es sobreyectiva. Como la composición de funciones sobreyectivas es sobreyectiva, concluimos que $f' \circ g: B \to A$ es sobreyectiva.

($\Leftarrow$) Sea $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ y $h: B \to A$ una función sobreyectiva. La función $g: A \to B$ dada por $g(a) = b_i$ donde i es el mínimo índice tal que $h(b_i) = a$ está bien definida (siempre existe este índice pues $h^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset$ y $\mathbb{N}$ es bien ordenado). Además es fácil ver que h es inyectiva. Por la proposición anterior A es finito y $|A| \leq |B|$. □

Comentario 1.29. La versión para conjuntos infinitos del principio sobreyectivo sirve solo si se supone el axioma de elección.

Podemos rescribir el principio sobreyectivo de una manera coloquial como sigue.

Proposición 1.30. ***(Principio Sobreyectivo) (informal)*** *Para probar que un conjunto tiene una cantidad menor o igual de elementos que otro, basta encontrar una sobreyección del segundo conjunto al primero. En particular, si se encuentra una sobreyección de A en B, y una sobreyección de B en A, entonces A y B tienen el mismo cardinal.*

Los principios anteriores distintas maneras de probar que dos conjuntos tienen el mismo cardinal.

Corolario 1.31. *Sean A y B dos conjuntos finitos. Los siguientes son equivalentes.*

1. $|A| = |B|$.
2. *Existe una inyección de A en B y una inyección de B en A.*
3. *Existe una sobreyección de A en B y una sobreyección de B en A.*
4. *Existe una inyección de A en B y una sobreyección de A en B.*

Demostración. Directa de los principios inyectivo y sobreyectivos. □

Como para números naturales hay tricotomía (para $a, b \in \mathbb{N}$, $a < b$, $a > b$ o $a = b$) concluimos como corolario:

Corolario 1.32. *Si A y B son dos conjuntos finitos entonces exactamente una de las siguientes se cumple:*

1. *Existe una inyección de A en B no sobreyectiva.*
2. *Existe una sobreyección de A en B no inyectiva.*
3. *Existe una biyección de A en B.*

1.4. Demostraciones Combinatoriales. Principios de la suma y el producto.

Una aplicación importante de todos los principios que hemos enunciado es que nos permiten en varios casos demostrar identidades usando argumentos combinatoriales.

Definición 1.33. Para probar una identidad del tipo $r = s$, donde r y s son expresiones aritméticas que se evalúan a números naturales, podemos encontrar conjuntos R y S, con $|R| = r$ y $|S| = s$ y luego encontrar una biyección entre R y S. A este tipo de demostraciones se le conoce como **demostración combinatorial.** El método anterior se extiende también para probar desigualdades $r \leq s$. En dicho caso basta encontrar una inyección de R en S o una sobreyección de S en R.

Estamos listos para formalizar dos principios básicos para el conteo: los principios de la suma y del producto.

Definición 1.34. Principio de la suma. Sean A y B conjuntos finitos *disjuntos* entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Definición 1.35. Principio del producto. Sean A y B conjuntos finitos.

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Los principios de la suma y del producto tradicionalmente se enuncian de manera coloquial como sigue.

Definición 1.36. Principio de la suma (informal) Si una actividad se puede realizar de a maneras y una segunda actividad se puede realizar de b maneras. Entonces existe un total de $a+b$ maneras de realizar *exactamente una* de las dos actividades.

Definición 1.37. Principio del producto (informal) Si hay a formas de hacer una actividad y b maneras de hacer una segunda actividad entonces existen $a \cdot b$ formas de realizar *ambas* actividades de manera secuencial.

Demostración combinatorial del principio de la suma. Sean $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ conjuntos finitos disjuntos. La función $f\colon [n+m] \to A \cup B$ dada por $f(i) = \begin{cases} a_i & \text{si } i \in [n], \\ b_{i-n} & \text{si } n+1 \leq i \leq n+m \end{cases}$ es una biyección. □

Demostración combinatorial del principio del producto. Sean $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ conjuntos finitos. La función $f\colon A \times B \to [n \cdot m]$ dada por $f(a_i, b_j) = (i-1)m + j$ es una biyección. □

Ejemplo 1.38.

1. Una alumna debe elegir un ramo electivo para llenar su curriculum. El departamento de matemáticas ofrece 12 ramos electivos que ella puede tomar y el departamento de física ofrece 9. Como los cursos son distintos, el principio de la suma nos dice que ella tiene $12 + 9 = 21$ opciones.

2. Un menú simple en el casino consiste de un plato de entrada y un plato de fondo. El casino ofrece cada dia 3 opciones de platos de entrada y 2 de platos de fondo. Luego el número de menús simples distintos es $3 \cdot 2 = 6$.

Algunas consecuencias inmediatas de lo que tenemos hasta ahora:

Corolario 1.39. *Sean A, B, C, D conjuntos finitos.*

1. (Principio de la Diferencia) $|B \setminus A| = |B| - |A \cap B|$.
2. (Principio de inclusión-exclusión básico: cardinalidad es modular) $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$.
3. $|A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$.
4. $|(A \times A) \cap (B \times B)| = |A \cap B|^2$.
5. $|(A \times B) \cap (C \times D)| = |A \cap C| \cdot |B \cap D|$.

Demostración. Ejercicio 1.4. □

Los principios de la suma y del producto se generalizan inmediatamente a múltiples conjuntos.

Proposición 1.40 (Principio de la Suma)**.** *Si $\{A_1, \ldots, A_k\}$ es una colección de conjuntos disjuntos cuya unión es A entonces $|A| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|$. Esto vale incluso si $k = 0$, en cuyo caso $A = \emptyset$, $|A| = 0$ y $\sum_{i=1}^{0} |A_i| = 0$.*

Proposición 1.41 (Principio del Producto)**.** *Si $(A_1, \ldots, A_k)$ es una secuencia finita de conjuntos finitos entonces $|\bigtimes_{i=1}^{k} A_i| = |\prod_{i=1}^{k} A_i| = \prod_{i=1}^{k} |A_i|$. Esto vale* incluso *si $k = 0$, en cuyo caso, $\prod_{i=1}^{0} A_i = \bigtimes_{i=1}^{0} A_i = \{\varepsilon\}$ y luego $|\prod_{i=1}^{0} A_i| = 1 = \prod_{i=1}^{0} |A_i|$.*

Los principios anteriores se prueban por inducción en k o directamente, de manera combinatorial.

Corolario 1.42. *Para todo conjunto finito A y todo $k \in \mathbb{N}$, $|A^k| = |A|^k$, donde entendemos (como siempre en aritmética natural) que $0^0 = 1$.*

Recordemos que A^k no es más que una notación agradable para denotar al conjunto de funciones de $[k]$ en A. Esta notación es muy flexible y se extiende como sigue.

Definición 1.43. El conjunto de funciones de A en B se denota como B^A.

Con esto $A^{[k]} = A^k$ por definición.

Proposición 1.44. *Para A y B finitos,*

$$|B^A| = |B|^{|A|}.$$

Demostración. Sea $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, con $n = |A|$. La función $\varphi \colon B^A \to B^n$ dada por $\varphi(f)_i = f(a_i)$ es una biyección. □

Ejemplo 1.45.

1. ¿Cuántos números naturales entre 1 y 1000 comienzan por la cifra 6?
   Solución: Separemos estos números por cantidad de cifras. De una cifra, hay 1 número que comienza por 6 (el 6). De dos cifras, tenemos los 10 números entre 60 y 69. De tres cifras tenemos los 100 números entre 600 y 699. Luego en total hay $1 + 10 + 100 = 111$ números que satisfacen lo pedido.

2. ¿Cuántos números naturales de a lo más 5 cifras se escriben sin usar la cifra 5?
   Solución: Hay al menos dos formas de contar este conjunto. Una de ellas involucra contar mediante el principio de producto la cantidad de números de i cifras que se escriben sin el 5, y luego sumar las cardinalidades sobre todo i. Esta manera si bien es válida, es algo larga y merece cuidado: Se debe recordar que los números de i cifras (con $i \geq 2$) no pueden empezar con la cifra 0.

   Una solución alternativa es encontrar una biyección entre el conjunto contado y las secuencias $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ donde cada a_i puede ser uno de los 9 elementos de $\mathbb{N}_{10} \setminus \{5\}$. La biyección consiste en completar cada número con 0's a la izquierda. El principio del producto nos garantiza entonces que hay 9^5 números.

Ejemplo 1.46. Probar combinatorialmente que para todo número $n \in \mathbb{N}^+$,

$$n^2 = (n+1)(n-1) + 1.$$

Solución: El lado izquierdo es la cardinalidad de $Y = [n]^2$, mientras que el lado derecho es la cardinalidad del conjunto $X = ([n+1] \times [n-1]) \cup \{(n+1, n)\}$ Se puede obtener una biyección de X en Y notando que

$$\begin{aligned} X &= [n] \times [n-1] \cup \{n+1\} \times [n]. \\ Y &= [n] \times [n-1] \cup [n] \times \{n\}. \end{aligned}$$

es fácil entonces escribir la biyección

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} (x, y) & \text{si } (x, y) \in [n] \times [n-1], \\ (y, n) & \text{si } (x, y) = (n+1, y) \in \{n+1\} \times [n]. \end{cases}.$$

La demostración anterior es algo forzada, ya que realmente es muchísimo más simple probarla de manera algebraica. No siempre esto es así. A continuación veamos que la fórmula para la suma geométrica se puede probar combinatorialmente.

Ejemplo 1.47. Pruebe combinatorialmente que para todo n, m números naturales con $m \geq 2$, se tiene

$$(m-1)\sum_{i=0}^{n} m^i = m^{n+1} - 1.$$

Solución: El lado izquierdo cuenta el conjunto $X = \{w = y\sigma\colon y \in [m]^*, 0 \leq |y| \leq n, \sigma \in [m-1]\}$. Mientras que el lado derecho cuenta el conjunto $Y = [m]^{n+1} \setminus \{(m, m, \ldots, m)\}$. Cada $w \in X$ tiene largo $|w| \leq n+1$. Considere la función $\varphi\colon X \longrightarrow Y$, que toma cada palabra de X y le agrega al final símbolos m hasta que la palabra tenga largo $n+1$, es decir:

$$\varphi(w) = wm^{n+1-|w|}.$$

Como la palabra w termina en un simbolo σ distinto de m, φ es biyectiva (su inversa consiste en eliminar letras m del final de la palabra hasta que ésta no termine en m).

Ejemplo 1.48.

1. ¿Cuántas palabras de A^* tienen a lo más k símbolos, para un conjunto finito A?
   Solución: Estamos buscando $\left|\bigcup_{i=0}^{k} A^i\right| = \sum_{i=0}^{k} |A|^i$. La cantidad anterior depende del cardinal de A y se simplifica usando suma geométrica a ser:

   $$[\![|A| \neq 1]\!]\frac{|A|^{k+1}-1}{|A|-1} + [\![|A| = 1]\!](k+1).$$

   Note que la fórmula también vale para $A = \emptyset$ (en dicho caso, $\bigcup_{i=0}^{k} A^i = A^0 = \emptyset^0 = \{\emptyset\}$ que tiene $1 = \frac{0-1}{0-1}$ elementos).

2. ¿Cuántas números naturales de a lo más k cifras se escriben sin usar la cifra 0?
   Solución: El conjunto que deseamos contar está en biyección con las palabras en $[9]^*$ que tienen entre 1 y k símbolos. Usando el ejercicio anterior, éstas son exactamente

   $$\frac{9^{k+1}-1}{9-1} - |[9]|^0 = \frac{9^{k+1}-9}{8}.$$

3. Una palabra es palíndroma si al leerse de derecha a izquierda se obtiene la misma palabra. ¿Cuántas palabras palíndromas hay en A^k?
   Solución: La solución depende de si k es par o impar.
   Si k es par, entonces toda palabra palíndroma en A^k se escribe como ww^R, con $w \in A^{k/2}$, donde w^R es la palabra w escrita de derecha a izquierda.
   Si k es impar, entonces toda palabra palíndroma en A^k se escribe como wxw^R, con $w \in A^{(k-1)/2}$, $x \in A$.
   Luego la cantidad pedida es:

   $$[\![k \text{ par}]\!] \cdot |A^{k/2}| + [\![k \text{ impar}]\!] \cdot |A^{(k-1)/2}| \cdot |A| \;=\; A^{\lceil k/2 \rceil}.$$

Un ejemplo importante de demostración combinatorial consiste en probar que el conjunto potencia de $[n]$ tiene exactamente 2^n elementos.

Ejemplo 1.49. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|\mathcal{P}(n)| = 2^n.$$

Solución: Más generalmente, si A es conjunto cualquiera (no necesariamente finito), probamos que $|\mathcal{P}(A)| = |\{0,1\}^A|$. Para esto considere la biyección $\varphi\colon \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^A$ dada por su indicatriz $\varphi(X) = \chi^X$, es decir

$$\varphi(X)_i = [\![i \in X]\!], \forall i \in A.$$

Con esto, $|\mathcal{P}(n)| = |\{0,1\}^n| = 2^n$. ■

Observación 1.50. Mucha gente simplemente llama 2^X a $\mathcal{P}(X)$. Esto viene de la biyección anterior, y usando la definición de Von Neumann de los naturales como conjuntos ($n := \mathbb{N}_n$, es decir $2 = \mathbb{N}_2 = \{0,1\}$).

Aunque menos frecuentes, también podemos dar demostraciones combinatoriales de desigualdades:

Ejemplo 1.51. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$n \leq 2^n,$$

Demostración. Usamos la inyección $[n] \to \mathcal{P}([n])$ dada por $i \mapsto \{i\}$. □

Ejemplo 1.52. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$n^2 \leq 2(2^n - 1),$$

Demostración. El lado derecho cuenta $\{-,+\} \times \mathcal{P}([n]) \setminus \{\emptyset\}$, es decir pares (s, X) con s un signo y X un subconjunto no vacío de $[n]$. La función $(s, X) \mapsto \begin{cases} (\min X, \max X) & s = +, \\ (\max X, \min X) & s = -, \end{cases}$ es claramente sobreyectiva en $[n]^2$, probando la igualdad. □

1.5. Multiconteo o sobreconteo

Una aplicación muy importante del principio de la suma es el siguiente:

Lema 1.53. *Sea $G = (L \cup R, E)$ un grafo bipartito, entonces $\sum_{v \in L} d_G(v) = \sum_{w \in R} d_G(v)$ En particular, si el grafo G es (s,t)-regular (i.e.,el grado de cada vértice en L es s, y el grado de cada vértice en R es t) se concluye que $|L|s = |R|t$.*

Demostración. Basta notar que $\bigcup_{v \in L} \delta(v) = E = \bigcup_{v \in R} \delta(v)$. □

La propiedad anterior es la base de una técnica llamada multiconteo. En general cada grafo bipartito codifica una relación binaria entre dos conjuntos. Si esta relación es, por ejemplo una función biyectiva, ambos conjuntos tienen el mismo cardinal (esto corresponde a un grafo bipartito 1-regular). Si la relación es una función tal que cada elemento del conjunto de llegada R tiene exactamente k preimágenes en L, entonces el grafo es $(1,k)$-regular y aplicando multiconteo se tiene que $|R| = |L|k$. Esta técnica general es muy útil cuando se desea probar combinatorialmente ecuaciones del tipo $|A| = |B|\frac{p}{q}$.

Postergaremos su uso hasta tener un poco más de vocabulario, pero damos un ejemplo simple a continuación.

Lema 1.54. *(Handshaking lemma) Si $G = (V, E)$ es un grafo cualquiera, entonces $|E| = \frac{\sum_{v \in V} d_G(v)}{2}$.*

Demostración. Considere el grafo bipartito H con bipartición $V(G)$ y $E(G)$ donde ve es arista si v es un extremo de e. Como cada elemento $v \in V(G)$ está conectado en H con $d_G(v)$ elementos $e \in E(G)$ tenemos que $|E(H)| = \sum_{v \in V(G)} d_G(v)$. Por otro lado, cada arista de $E(G)$ está conectada en H con dos vértices de V. Luego $|E(H)| = 2|E(G)|$. Igualando se concluye la demostración. □

1.6. Principio general del producto. Ordenamientos.

Muchas veces deseamos contar secuencias de k tareas, donde la i-ésima tarea se puede elegir dentro de un conjunto dado, pero no todas las secuencias son válidas. Un caso donde esto ocurre es cuando una vez que las primeras $i-1$ tareas se han elegidos, existen exactamente n_i posibilidades para elegir la i-ésima tarea de modo que la secuencia se puede completar a una secuencia válida. En dicho caso, al igual que con el principio tradicional, el número total de secuencias válidas es $\prod_{i=1}^{k} n_i$.

La descripción formal de este principio está a continuación y su demostración se deja propuesta (Ejercicio 1.9).

Definición 1.55. Sea $B \subseteq A^*$ un lenguaje sobre un alfabeto cualquiera. Decimos que una palabra $w \in A^*$ es un prefijo de B si existe $w' \in A^*$ tal que $ww' \in B$. Decimos que w es sufijo de B si existe w' tal que $w'w \in B$.

Proposición 1.56. *[Principio general del producto] Sea $\emptyset \neq B \subseteq A^k$, para $k \in \mathbb{N}$, un conjunto de palabras de largo k. Suponga que los valores $s_1, s_2, \ldots, s_k \in \mathbb{N}$ satisfacen que para todo $1 \leq j \leq k$ y todo prefijo w de B, con $|w| = j-1$ existen exactamente s_j símbolos a en A tal que wa es prefijo de B, entonces $|B| = \prod_{i=1}^{k} s_i$.*

Una aplicación habitual corresponde a calcular el número de ordenamientos de un conjunto.

Definición 1.57. Un ordenamiento de un conjunto finito A es una palabra en $A^{|A|}$ con todos sus símbolos distintos. Así, por ejemplo los ordenamientos de $\{a, 1, 2\}$ son $\{a12, a21, 1a2, 12a, 2a1, 21a\}$. Llamamos $\operatorname{ord}(A)$ al conjunto de ordenamientos de A, y definimos $n! := |\operatorname{ord}([n])|$.

Proposición 1.58. *$n! = \prod_{i=1}^{n} i$.*

Demostración. Notamos que $\operatorname{ord}(\emptyset) = \emptyset^0 = \{\varepsilon\}$ por lo que $0! = 1$. Tomemos ahora $n \geq 1$. El primer símbolo de un ordenamiento de $[n]$ se puede elegir de n maneras; el segundo, de solo $n-1$ (cualquiera excepto el primer símbolo); en general, el i-ésimo símbolo se puede elegir de $n-(i-1)$ maneras, por lo tanto el número de ordenamientos es igual a $\prod_{i=1}^{n}(n-(i-1)) = \prod_{i=1}^{n} i$. □

Observación 1.59. Si A tiene n elementos, entonces podemos usar la biyección natural entre A y $[n]$ para concluir que $\operatorname{ord}(A)$ también tiene $n! = |A|!$ elementos.

En esta sección veremos varias consecuencias del principio general del producto. Antes de ello, veamos un par de ejemplos que ilustran dificultades que podremos encontrar.

Ejemplo 1.60. ¿Cuántas secuencias w de $2n$ números enteros cumplen las siguientes condiciones simultáneamente?

- $w_n = 0$.
- Dos elementos consecutivos de la secuencia difieren en exactamente 1 unidad.

Solución. Para describir w, procedemos por pasos determinando un elemento de la secuencia a la vez en el siguiente orden: Primero w_n; Luego todos los elementos que le siguen $w_{n+1}, \ldots, w_{2n}$; Finalmente los elementos que le preceden $w_{n-1}, w_{n-2}, \ldots, w_1$. Notamos que a excepción por el primer paso que tiene 1 opción $w_n = 0$, en cada paso podemos elegir el elemento correspondiente de 2 maneras (como el sucesor o el antecesor del único elemento consecutivo que ya ha sido definido). Luego, el número de secuencias válidas es $1 \cdot 2^{2n-1} = 2^{2n-1}$. □

El siguiente problema muestra que no siempre la primera idea funciona:

Ejemplo 1.61. ¿Cuántas ordenamientos de $[n]$ son tales que el conjunto de símbolos de cada prefijo es un intervalo? Por ejemplo, si $n = 4$, 3241 y 2134 satisfacen la propiedad pero 1243 no.

Solución. Si se intenta aplicar el principio del producto para construir la palabra símbolo por símbolo desde la izquierda rápidamente nos encontramos con problemas: si en algún minuto $w_i = 1$ o $w_i = n$, el siguiente símbolo está predeterminado y en cualquier otro caso, el siguiente símbolo tiene 2 opciones.

Resulta más simple resolver el problema de derecha a izquierda. Para w ordenamiento de $[n]$, e $I \subseteq [n]$, llamemos $w_I = \{w_i : i \in I\}$. Luego $w_{[n]} = [n]$ es intervalo. En cada momento $m \geq 2$, si $w_{[m]}$ es intervalo hay solo 2 opciones para w_m que dejan $w_{[m-1]}$ intervalo (elegir w_m como el extremo superior o como el extremo inferior de $w_{[m]}$). Sigue que hay 2 opciones para w_n, 2 para w_{n-1}, ..., y 2 para w_2, w_1 queda determinado por las decisiones anteriores. En conclusión hay 2^{n-1} tales ordenamientos. □

1.7. Ordenamientos circulares.

Un conjunto A de n personas se desean sentar en una mesa circular. ¿Cuántas formas existen si dos formas se consideran idénticas cuando cada persona tiene el mismo vecino derecho, es decir si una es una rotación de la otra?

Llamemos a cada posible configuración un *ordenamiento circular* de A, y $\operatorname{ord}_C(A)$ al conjunto de dichos elementos. Una forma de resolver este problema es creando una relación bipartita entre ordenamientos de A y ordenamientos circulares de A: un ordenamiento circular se relaciona con todos los ordenamientos lineales que se pueden *leer* eligiendo un elemento cualquiera de A como primer elemento y luego leyendo la palabra de A^n formada al avanzar en el sentido del reloj.

Cada ordenamiento circular se relaciona con n ordenamientos lineales y cada ordenamiento lineal se relaciona con 1 ordenamiento circular. De esto se deduce que $n|\operatorname{ord}_C(A)| = 1|\operatorname{ord}(A)|$ y luego

$$|\operatorname{ord}_C(A)| = [\![n \geq 1]\!]\frac{n!}{n} + [\![n = 0]\!] = (n-1)!$$

1.8. Ejercicios

Ejercicio 1.1. Felipe tiene una barra de chocolate pre-picada en nm cuadritos (n filas y m columnas). Esta barra es bastante dura por lo cual para comerla debe antes separar los cuadritos. Felipe puede en cada paso romper una de las piezas que tenga y, mediante un fuerte golpe, dividirla a través de una de las filas horizontales o verticales. ¿Cuál es el número mínimo de pasos que Felipe debe realizar para separar la barra completamente en nm cuadritos?

Ejercicio 1.2. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Demuestre que $n = m$ si y solo si existe biyección entre $[n]$ y $[m]$. Concluya que si un conjunto A es finito entonces existe un solo valor n tal que $|A| = n$.
Indicación: Suponga que $n \leq m$ y pruebe la afirmación por inducción en m.

Ejercicio 1.3. Pruebe que todos los subconjuntos de un conjunto finito son finitos[3]. Más aún pruebe que $A \subseteq B$ y B finito implica que A es finito y $|A| \leq |B|$.

Ejercicio 1.4. Pruebe el Corolario 1.39 .

Ejercicio 1.5. Pruebe los principios de la suma y producto para múltiples conjuntos (Proposiciones 1.40 y 1.41) de dos maneras: por inducción y también dando directamente una biyección natural entre $\bigcup_{i=1}^n A_i$ y $[\,\sum_{i=1}^n |A_i|\,]$ en el caso de la suma, y entre $\prod_{i=1}^n A_i$ y $[\,\prod_{i=1}^n |A_i|\,]$ en el caso del producto.

[3] Hágalo sólo usando la definición de equipotencia, no use el principio inyectivo

Ejercicio 1.6. Demostrar combinatorialmente que para todo $a, b, c \in \mathbb{N}$,

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}, (a^b)^c = a^{b \cdot c}, (ab)^c = a^c \cdot b^c$$

Usando las propiedades anteriores, deduzca que para todo par de conjuntos finitos disjuntos A y B, los conjuntos siguientes tienen todos el mismo cardinal $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))^{\mathcal{P}(B)}, \mathcal{P}(\mathcal{P}(B))^{\mathcal{P}(A)}, \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)), \mathcal{P}(\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B))$

Ejercicio 1.7. Pruebe combinatorialmente la desigualdad de Bernoulli siguiente:

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, \quad (1+n)^k \geq 1 + nk.$$

Ejercicio 1.8. Pruebe combinatorialmente la desigualdad siguiente:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}^+, \quad (a+b)^c \geq a^c + b^c.$$

Ejercicio 1.9. Demuestre el principio general del producto, reduciéndolo al principio habitual (Proposición 1.56)

Ejercicio 1.10. ¿Cuántos números de 9 dígitos (notar que su primer dígito no puede ser 0) cumplen las siguientes condiciones simultáneamente?

- La cifra central es un 5.
- Dos cifras consecutivas difieren en exactamente 1 unidad.

Ejercicio 1.11. Vuelva a responder la misma pregunta del ejercicio anterior pero ahora considere números de 11 dígitos. *Indicación:* Puede ser más simple contar palabras en $\mathbb{N}_{10}^*$ que satisfagan las propiedades y luego eliminar aquellas que no corresponden a números.

Cardinales generales

Los ejercicios siguientes pueden ser algo distantes al curso de combinatoria, pero se incluyen para los interesados.

Ejercicio 1.12. Defina las relaciones entre clases ($X \approx Y \iff |X| = |Y|$), ($X \preceq Y \iff \exists f : X \to Y$ inyectiva), ($X \preceq^* Y \iff \exists f : Y \to X$ sobreyectiva). Pruebe (sin usar axioma de elección) que $\approx$ es de equivalencia, que $\preceq, \preceq^*$ son preordenes y que $X \preceq Y$ implica $X \preceq^* Y$.

Ejercicio 1.13. Pruebe sin usar axioma de elección el teorema de Cantor-Schröder–Bernstein siguiente: $X \preceq Y \preceq X$ implica $X \approx Y$.
Indicación: Suponga $X \cap Y = \emptyset$, y sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ las inyecciones dadas por hipótesis. Considere el digrafo bipartito infinito $G = (X \cup Y, E)$ donde $E = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = y\} \cup \{(y, x) \in Y \times X : g(y) = x\}$. Para cada componente conexa C de G, cree una biyección $h : C \cap X \to C \cap Y$.

Ejercicio 1.14. (Análisis) Pruebe usando el axioma de elección que $X \preceq^* Y$ implica $X \preceq Y$, y deduzca el teorema dual de Cantor-Schröder–Bernstein. $X \preceq^* Y \preceq^* X$ implica $X \approx Y$.

Ejercicio 1.15. (Análisis) Pruebe usando el axioma de elección que $\preceq$ es una relación total (i.e. para todo X, Y, $X \preceq Y$ o $Y \preceq X$).
Indicación: El caso interesante es si X, Y son no vacíos. Defina en este caso $\mathcal{S} = \bigcup_{A \subseteq X, B \subseteq Y} \{f : A \to B, \text{biyectiva}\}$. Pruebe que $\mathcal{S} \neq \emptyset$ y defina un orden $(S, \leq)$ donde $f \leq g$ si g extiende a f. Use Lema de Zorn para este orden.

Ejercicio 1.16. Este ejercicio da una manera alternativa de definir conjuntos finitos que no depende de la existencia del conjunto de los números naturales. Un conjunto A se dice Dedekind-finito si no es equipotente con ninguno de sus subconjuntos propios, es decir

$$(\forall B \subseteq A), \quad |A| = |B| \iff A = B.$$

Se dice que es Dedekind-infinito si no es Dedekind-finito. Pruebe que los siguientes son equivalentes:

- A es Dedekind-infinito
- Existe una inyección $f : A \to A$ no sobreyectiva.
- Existe una inyección de $\mathbb{N}$ en A.
- Existe $B \subseteq A$ con $|B| = |\mathbb{N}|$.

Ejercicio 1.17. Pruebe que si A es finito entonces es Dedekind-finito.

Ejercicio 1.18. (Análisis) Pruebe usando el axioma de elección la recíproca de de la proposición anterior, es decir que todo conjunto Dedekind-finito es finito.
Ojo: La demostración estándar que muestra que todo conjunto infinito A satisface $|\mathbb{N}| \leq |A|$ usa axioma de elección.

Ejercicio 1.19. (Análisis) Sean A, B, C conjuntos. Definimos la suma y producto de cardinales generales como sigue.

$$\begin{aligned} |A| + |B| = |C| &\iff \text{existen } A', B' \text{ disjuntos tal que } |A| = |A'|, |B| = |B'|, |A' \cup B'| = |C|. \\ |A| \cdot |B| = |C| &\iff |A \times B| = |C|. \end{aligned}$$

Pruebe que si al menos uno de A o B son infinitos, entonces (usando el axioma de elección),

$$|A| + |B| = |A| \cdot |B| = \text{máx}(|A|, |B|),$$

donde

$$\text{máx}(|A|, |B|) = \begin{cases} |B| & \text{si } |A| \leq |B| \\ |A| & \text{si } |B| \leq |A| \end{cases}$$

Capítulo 2

Selecciones de elementos.

2.1. Selecciones de objetos de un conjunto fijo

Hay dos parámetros importantes a considerar para clasificar selecciones de elementos de un conjunto dado A. (1) Si se permiten repetir elementos. (2) Si el orden importa. Cuando el orden importa, hablamos de **listas** o *secuencias* sobre A y usamos notación de palabras (ej: $abc \neq acb$). Cuando el orden no importa hablamos de **combinaciones** sobre A y usamos notación de conjuntos (si no se permite repetir) o de multiconjuntos. En particular, cuando deseemos considerar elementos repetidos, es útil poner los elementos en un paréntesis cuadrado (ej: $[a, a, b] = [a, b, a]$) donde permitimos agrupar términos como potencias (si no hay confusión, podemos evitar escribir las comas), $[a, a, b, c, c] = [a^2bc^2]$. La siguiente tabla nos ayudará a introducir notación.

Selecciones de k objetos.	Sin repetición	Con repetición
Importa el orden (Listas)	k-variaciones. $A^{\underline{k}}$.	k-secuencias. A^k.
No importa el orden (Combinaciones)	k-conjuntos. $\binom{A}{k}$.	k-multiconjuntos. $\left(\!\binom{A}{k}\!\right)$.

Nota: En varios textos, $A^{\underline{k}}$ se denota por $(A)_k$. Usamos la primera notación para evitar confusión con el uso de subindices.

Ejemplo 2.1. Si $X = \{x, y\}$ es un conjunto de 2 elementos, entonces la pregunta ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar dos elementos de X? es ambigua ya que dependiendo del contexto, la respuesta puede ser 1, 2, 3 o 4:

1. Hay 1 2-conjunto de X: $\binom{X}{2} = \{ \{x, y\} \}$.
2. Hay 2 2-variaciones de X: $X^{\underline{2}} = \{xy, yx\}$.
3. Hay 3 2-multiconjuntos de X: $\left(\!\binom{X}{2}\!\right) = \{[xx], [xy], [yy]\}$.
4. Hay 4 2-secuencias de X: $X^2 = \{xx, xy, yx, yy\}$.

Ejemplo 2.2. Para k pequeño, las k-variaciones, k-conjuntos y k-multiconjuntos de $A = \{a, b, c\}$ son:

$$A^{\underline{2}} = \{ab, ac, ba, bc, ca, cb\}, \qquad A^{\underline{3}} = \{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}, \qquad A^{\underline{4}} = \emptyset.$$

$$\binom{A}{2} = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}, \qquad \binom{A}{3} = \{\{a, b, c\}\}, \qquad \binom{A}{4} = \emptyset.$$

$\left(\!\!\binom{A}{2}\!\!\right) = \{[a^2], [ab], [ac], [b^2], [bc], [c^2]\}.$
$\left(\!\!\binom{A}{3}\!\!\right) = \{[a^3], [a^2b], [a^2c], [ab^2], [abc], [ac^2], [b^3], [b^2c], [bc^2], [c^3]\}.$
$\left(\!\!\binom{A}{4}\!\!\right) = \{[a^4], [a^3b], [a^3c], [a^2b^2], [a^2bc], [a^2c^2], [ab^3], [ab^2c], [abc^2], [ac^3], [b^4], [b^3c], [b^2c^2], [bc^3], [c^4]\}.$

Observación 2.3. Caso especial: $k = 0$.
Para todo A, $A^0 = A^{\underline{0}} = \binom{A}{0} = \left(\!\binom{A}{0}\!\right) = \{\varepsilon\}$ donde ε representa la lista/combinación vacía.

Observación 2.4. Caso especial: $A = \emptyset$.
Para todo $k \geq 1$, $\emptyset^k = (\emptyset)_k = \binom{\emptyset}{k} = \left(\!\binom{\emptyset}{k}\!\right) = \emptyset$.

En lo que resta de la sección estudiaremos la cardinalidad de los conjuntos anteriormente definidos. Para ello, la siguiente notación es de utilidad.

Definición 2.5. Para todo $n, k \in \mathbb{N}$, (re)definimos

$$n^k := \left| [n]^k \right| \qquad \text{(Potencias naturales)}$$

$$n^{\underline{k}} := \left| [n]^{\underline{k}} \right| \qquad \text{(Factorial decreciente)}$$

$$\binom{n}{k} := \left| \binom{[n]}{k} \right| \qquad \text{(Combinatorio de } n \text{ sobre } k \text{, o coeficiente binomial de } n \text{ sobre } k\text{)}$$

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) := \left| \left(\!\!\binom{[n]}{k}\!\!\right) \right| \qquad \text{(Multicombinatorio de } n \text{ sobre } k\text{)}$$

Observación 2.6. Si $|A| = n$ entonces $|A^k| = n^k$, $|A^{\underline{k}}| = n^{\underline{k}}$, $\left|\binom{A}{k}\right| = \binom{n}{k}$ y $\left|\left(\!\binom{A}{k}\!\right)\right| = \left(\!\binom{n}{k}\!\right)$. Estas igualdades se prueban usando la biyección entre A y $[n]$.

Puede parecer extraño que hayamos *redefinido* las potencias naturales siendo una operación tan habitual. Sin embargo al hacerlo de esta manera respondemos de inmediato la siguiente duda natural ¿Cual es la definición natural de 0^0? En general, ¿como definimos los valores anteriores cuando $n = 0$?

Observación 2.7. Usando las definiciones y observaciones anteriores, se concluye que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$n^0 = n^{\underline{0}} = \binom{n}{0} = \left(\!\!\binom{n}{0}\!\!\right) = 1.$$

En particular,

$$0^0 = 0^{\underline{0}} = \binom{0}{0} = \left(\!\!\binom{0}{0}\!\!\right) = 1,$$

y

$$0! = 0^{\underline{0}} = 1.$$

Por otro lado, para todo $k \geq 1$

$$0^k = 0^{\underline{k}} = \binom{0}{k} = \left(\!\!\binom{0}{k}\!\!\right) = 0.$$

Como es de esperar, (por principio del producto), la definición de potencias naturales coincide con la definición habitual, es decir $n^k = |[n]^k| = \prod_{i=1}^k |[n]| = \prod_{i=1}^k [n]$.

2.2. Variaciones, ordenamientos y permutaciones de un conjunto.

Prosigamos con las variaciones de un conjunto. Recordamos que si A es un conjunto con n elementos, entonces directamente $\left|A^{\underline{k}}\right| = n^{\underline{k}}$. La próxima proposición da una fórmula para esta cantidad.

Proposición 2.8.

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ n^{\underline{n}} = n! = \prod_{i=1}^{n} i,$$

$$\forall n, k \in \mathbb{N}: \ n^{\underline{k}} = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \prod_{i=n-k+1}^{n} i.$$

y luego,

$$\forall n, k \in \mathbb{N}: \ n^{\underline{k}} = [\![k \leq n]\!] \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Demostración. La primera parte sale del hecho que $[n]^{\underline{n}} = \operatorname{ord}([n])$ por definición. Luego $n^{\underline{n}} = |\operatorname{ord}([n])| = n! = \prod_{i=1}^{n} i$. Para la segunda, notamos que $[n]^{\underline{k}} = \emptyset$ para $k \geq n+1$, por lo que $n^{\underline{k}} = 0$ si $k \geq n+1$. En otro caso, la identidad se obtiene del principio general del producto. La tercera se obtiene de combinar las dos expresiones anteriores para el caso $k \leq n$. □

Al igual que las secuencias están en biyección con cierto conjunto de funciones, las variaciones están en biyección con cierto conjunto de funciones inyectivas.

Definición 2.9. El conjunto de funciones inyectivas de A en B se denota como $\operatorname{Iny}(A, B) = \{f \in B^A \mid f \text{ inyectiva}\}$.

Proposición 2.10. *Para A y B finitos,*

$$|\operatorname{Iny}(A, B)| = |B|^{\underline{|A|}}.$$

Demostración. Sea $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, con $n = |A|$. La función $\varphi\colon \operatorname{Iny}(A, B) \to B^{\underline{n}}$ dada por $\varphi(f)_i = f(a_i)$ es una biyección. □

Definición 2.11. Una permutación de A es una función biyectiva de A en si misma. Denotamos al conjunto de permutaciones de A como $\mathcal{S}_A = \{f \in A^A \mid f \text{ biyectiva}\}$. Además, denotamos $\mathcal{S}_n := \mathcal{S}_{[n]}$.

Proposición 2.12. *Para A finito,*

$$|\mathcal{S}_A| = |A|\,!$$

Demostración. Directo del hecho que $\mathcal{S}_A = \operatorname{Iny}(A, A)$, y del hecho que $n! = n^{\underline{n}}$. □

Observación 2.13. Como las permutaciones de un conjunto A de cardinal n están en biyección con las n-variaciones (ordenamientos) de A, es común (pero confuso) llamar también permutación de A a los ordenamientos de A.

Dadas las proposiciones anteriores, es tentador denotar $\operatorname{Iny}(A, B)$ como $B^{\underline{A}}$, y $\mathcal{S}_A$ como $A!$. Nos resistiremos a esa tentación pues la última notación no es estándar.

2.3. Combinaciones: subconjuntos y multiconjuntos

Prosigamos con las combinaciones de un conjunto. Al igual que antes notamos que si A tiene n elementos, entonces directamente $\left|\binom{A}{k}\right| = \binom{n}{k}$. La próxima proposición nos da una fórmula para esta cantidad.

Proposición 2.14.

$$\forall n, k \in \mathbb{N} : \binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = [\![k \le n]\!]\frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Demostración. Por multiconteo entre variaciones y combinaciones. Consideremos la función $f\colon [n]^{\underline{k}} \to \binom{[n]}{k}$, que manda cada k-variación w a su conjunto de símbolos. Cada conjunto X en $\binom{[n]}{k}$ tiene exactamente $k!$ preimágenes pues $f^{-1}(X) = \operatorname{ord}(X)$. Luego: $1n^{\underline{k}} = k!\binom{n}{k}$, de lo que se deduce lo pedido. La segunda igualdad es una simplificación de $n^{\underline{k}}$. □

Antes de proseguir con los multiconjuntos, detengámonos a resolver algunos problemas.

Ejercicios resueltos 2.15. De una demostración combinatorial de las siguientes identidades-

1. $\forall 0 \le k \le n : \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. $\forall k, n \in \mathbb{N} : \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.
3. $\sum_{k}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Demostración.

1. Usar la biyección $\binom{[n]}{k} \to \binom{[n]}{n-k}$ dada por $X \mapsto [n] \setminus X$ (complemento).
2. Basta notar que $\binom{[n+1]}{k+1} = \underbrace{\binom{[n]}{k+1}}_{\text{Conjuntos sin } n+1} \cup \left\{\{n+1\} \cup Y \colon Y \in \binom{[n]}{k}\right\}$ y que la unión es disjunta.
3. Directo de $\mathcal{P}([n]) = \bigcup_{k=0}^{n} \binom{[n]}{k}$, y del hecho que $2^n = |\mathcal{P}([n])|$. □

Uno de los ejercicios anteriores nos permite dar una definición alternativa de los coeficientes binomiales en función de una recurrencia. Esto aparecerá con cierta frecuencia en el curso.

Proposición 2.16. *Los números* $\left(\binom{n}{k}\right)_{n,k\ge 0}$ *están definidos por la siguiente recurrencia:*

$$\forall k, n \ge 1 : \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

con valores de borde, $\binom{n}{0} = 1$, *para* $n \ge 0$ *y* $\binom{0}{k} = 0$, *para* $k \ge 1$.

Tratemos ahora los multiconjuntos. Un multiconjunto de A es una selección de objetos de A donde cada elemento puede aparecer más de una vez y el orden no importa. Para poder tratar con ellos necesitamos una definición formal.

Definición 2.17. Sea A un conjunto. Un multiconjunto de A es una función $x\colon A \to \mathbb{N}$, donde $x(a)$ representa el número de veces que se selecciona $a \in A$. Llamamos tamaño de x a la cantidad $|X| = \sum_{a\in A} x(a)$ y soporte de x, al conjunto $\mathrm{Sop}(x) = \{a \in A\colon x(a) \geq 1\}$, llamamos elementos de x a los elementos de $\mathrm{Sop}(x)$. Decimos que $A = \mathrm{dom}(x)$ es el conjunto de referencia de x.

Abusando notación, decimos que dos multiconjuntos B y C son iguales si tienen igual soporte e igual función multiplicidad restringida a su soporte[1]. Podemos describir un multiconjunto listando sus elementos en cualquier orden considerando repeticiones $x = [a, a, b, c, c]$ o abreviadamente como $x = [a^2bc^2]$. Si cada elemento de un multiconjunto aparece con multiplicidad 1, identificamos el multiconjunto con el conjunto asociado.

Definición 2.18. Para A conjunto, llamamos $\mathcal{M}(A)$ al conjunto de sus multiconjuntos. En particular, $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{M}(A)$, y $\emptyset$ es multiconjunto de cualquier conjunto. Para $k \in \mathbb{N}$, llamamos $\left(\!\binom{A}{k}\!\right) = \{x \in \mathcal{M}(A)\colon |X| = k\}$, Recordemos que para $n \in \mathbb{N}$, llamamos $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left|\left(\!\binom{[n]}{k}\!\right)\right|$.

Es directo notar que $\mathcal{M}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ y que si $A \neq \emptyset$, $\mathcal{M}(A)$ es infinito. Además $\left(\!\binom{n}{0}\!\right) = 1$ para $n \geq 0$ y $\left(\!\binom{0}{k}\!\right) = 0$ si $k > 0$. Ahora estamos listos para encontrar el valor de $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ en otro caso.

Proposición 2.19. *Para $n, k \in \mathbb{N}$. Si $n + k \geq 1$,*

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$$

Demostración. Si $n = 0$ y $k \geq 1$, se tiene $\left(\!\binom{0}{k}\!\right) = 0 = \binom{k-1}{k}$. Así que supongamos que $n \geq 1$. Considere la biyección que a un multiconjunto x de $[n]$ de tamaño k le asocia la palabra binaria $x' \in \{0,1\}^{n+k-1}$ dada por

$$x' = 0^{x(1)}10^{x(2)}1 \cdots 10^{x(n-1)}10^{x(n)}.$$

La asignación $x \mapsto x'$ es una biyección entre $\left(\!\binom{[n]}{k}\!\right)$ y las palabras en $\{0,1\}^{n+k-1}$ con exactamente k símbolos 0 y $n-1$ separadores 1. El último conjunto, a su vez, está en biyección con $\binom{[n+k-1]}{k}$, ya que cada palabra x' está definida exactamente por el conjunto de índices i en $[n+k-1]$ tales que $x'_i = 0$. $\square$

En nuestra notación actual, no tenemos la igualdad directa $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$ pues para el caso $n = k = 0$ el lado izquierdo es 1 y el derecho es $\binom{-1}{0}$ que no tiene sentido. Más adelante, le daremos significado a $\binom{-n}{k}$ y en ese momento la igualdad deseada $\binom{-1}{0} = 1$ se tendrá. Haciendo ese importante supuesto tenemos la igualdad

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k}.$$

En el futuro, volveremos a usar biyecciones como esta, así que le daremos nombre a esta biyección. Para x multiconjunto, llamamos a x' su palabra binaria asociada.

Al igual que antes, podemos dar una definición alternativa de los números $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ via una recurrencia.

Proposición 2.20. *Los números $\left(\left(\!\binom{n}{k}\!\right)\right)_{n,k\geq 0}$ están definidos por la siguiente recurrencia:*

$$\forall k, n \geq 1 : \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right).$$

con valores de borde, $\left(\!\binom{n}{0}\!\right) = 1$, para $n \geq 0$ y $\left(\!\binom{0}{k}\!\right) = 0$, para $k \geq 1$.

Demostración. Propuesta. $\square$

[1] Este abuso de notación está en el mismo espíritu de considerar iguales dos funciones que formalmente tengan distinto codominio pero igual asignación.

2.4. Ejercicios

Ejercicio 2.1. Para $n, k, m \in \mathbb{N}$, dé demostraciones directas puramente biyectivas de

$$\begin{aligned} n! &= (n-k)!n^{\underline{k}} \\ n! &= \binom{n}{k}(n-k)!k!. \\ m^{\underline{k}}\binom{n}{k} &= n^{\underline{k}}\binom{m}{k} \\ n^{\underline{k}}(n-k)^{\underline{m}} &= n^{\underline{m}}(n-m)^{\underline{k}} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.2. Demostrar combinatorialmente que para todo $n, k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} n! &\leq n^n. \\ n^{\underline{k}} &\leq n^k. \\ \binom{n}{k} &\leq \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right). \end{aligned}$$

Ejercicio 2.3. Las siguientes identidades son simples de probar algebráicamente, para $n, k, a, b, c \in \mathbb{N}$. Pruébelas combinatorialmente:

$$\begin{aligned} (k+1)\binom{n+1}{k+1} &= (n+1)\binom{n}{k} &&= (n+1-k)\binom{n+1}{k}. \\ \binom{a+b+c}{a}\binom{b+c}{b} &= \binom{a+b+c}{b}\binom{c+a}{c} &&= \binom{a+b+c}{c}\binom{a+b}{a}. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.4. Veinte autos corren en una carrera. Sabiendo que no hay empates, conteste cada una de las preguntas por separado: ¿Cuántos posibles resultados tiene la carrera si el resultado consiste en...

1. conocer el lugar de cada corredor?
2. determinar solo los 10 mejores corredores (la carrera es una clasificatoria, el orden entre los clasificados no importa)?
3. es una competencia con medallas y solo importa quien sacó Oro, Plata y Bronce?

Ejercicio 2.5. Demuestre combinatorialmente la Proposición 2.20.

Ejercicio 2.6. Para A conjunto, llame $\mathcal{P}_k(A) = \{x \in \mathcal{M}(A) \colon x_a \leq k, \forall a \in A\}$ al conjunto de los multiconjuntos que tienen a cada símbolo a lo más k veces, de modo que $\mathcal{P}_1(A) = \mathcal{P}_k(A)$ y $\mathcal{M}(A) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_k(A)$. Pruebe combinatorialmente que $|\mathcal{P}_k(A)| = (k+1)^{|A|}$.

Ejercicio 2.7. Use las recurrencias de las proposiciones 2.16 y 2.20 para llenar 3 filas adicionales de los siguientes *triángulos de Pascal* (no escriba los ceros).

$\binom{n}{k}$	k = 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n = 0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8											
9											
10											

$\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$	k = 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n = 0	1										
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
4	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
5											
6											
7											

¿Puede notar que un triángulo es una rotación del otro?

Ejercicio 2.8. Probar **directamente** de manera combinatorial o por doble conteo. Es decir, encuentre biyecciones entre 2 conjuntos con las cardinalidades requeridas, o cuente un conjunto de dos maneras distintas, **además** identifique la igualdad en el triángulo de Pascal correspondiente. Para todo $n, m, k \in \mathbb{N}$.

$$\binom{n+1}{2} = \sum_i^n i, \qquad \binom{n+1}{k+1} = \sum_i^n \binom{i}{k},$$

$$\left(\!\binom{n+1}{k}\!\right) = \sum_i^k \left(\!\binom{n}{i}\!\right), \qquad \left(\!\binom{n+1}{k+1}\!\right) = \sum_i^n \sum_j^k \left(\!\binom{i}{j}\!\right).$$

Ejercicio 2.9. Probar **directamente** de manera combinatorial o por doble conteo. Es decir, encuentre biyecciones entre 2 conjuntos con las cardinalidades requeridas, o cuente un conjunto de dos maneras distintas.

$$\sum_i i\binom{n}{i} = n2^{n-1}.$$

$$\sum_i i^{\underline{k}}\binom{n}{k} = n^{\underline{k}}2^{n-k}.$$

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}. \qquad \text{(Identidad de Vandermonde)}$$

$$\left(\!\binom{n+1}{k}\!\right) = \left(\!\binom{k+1}{n}\!\right)$$

Ejercicio 2.10. Una dulcería ofrece dulces de 10 sabores distintos. Si uno desea comprar una bolsa de 20 dulces (no necesariamente distintos). ¿Cuántas posibles bolsas se pueden formar? ¿Es $\left(\!\binom{20}{10}\!\right)$ o $\left(\!\binom{10}{20}\!\right)$?

Ejercicio 2.11. Imagine que tiene un librero con n casilleros y considere un conjunto de k libros distintos (identificado con $[k]$) que desea apilar en esos casilleros (en otras palabras, en cada casillero hay una lista ordenada de libros, que eventualmente puede estar vacía). Llamemos (n, k)-libreros a cada posible configuración. Por ejemplo, hay 12 $(3, 2)$-libreros distintos (codificados como listas separadas por barras a continuación).

```
|12|  |  | ; |  |12|  | ; |  |  |12| ; |21|  |  | ; |  |21|  | ; |  |  |21| ;
|1 |2 |  | ; |1 |  |2 | ; |2 |1 |  | ; |2 |  |1 | ; |  |1 |2 | ; |  |2 |1 | .
```

Definamos (provisoriamente), $n^{\overline{k}}$ como el cardinal del conjunto de los (n,k)-libreros.
Pruebe por inducción[2] en k que

$$n^{\overline{k}} = n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1) = \prod_{i=n}^{n+k-1} i = (n+k-1)^{\underline{k}}.$$

La cantidad $n^{\overline{k}}$ se conoce como factorial creciente de n sobre k.
¿Puede dar una demostración combinatorial de la identidad[3] $n^{\overline{k}} = (n+k-1)^{\underline{k}}$?

Ejercicio 2.12. Usando el ejercicio anterior se puede notar que para $n, k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left(\!\binom{n}{k}\!\right) &= [\![n \geq 1]\!]\binom{n+k-1}{k} + [\![n = k = 0]\!] \\ &= [\![n \geq 1]\!]\frac{(n+k-1)^{\underline{k}}}{k!} + [\![n = k = 0]\!] = [\![n \geq 1]\!]\frac{n^{\overline{k}}}{k!} + [\![n = k = 0]\!] = \frac{n^{\overline{k}}}{k!}.\end{aligned}$$

Pruebe combinatorialmente la igualdad resultante. Específicamente, pruebe de manera biyectiva que

$$k!\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = n^{\overline{k}}.$$

Indicación: Recuerde como se probó que

$$k!\binom{n}{k} = n^{\underline{k}}.$$

Ejercicio 2.13. Hay n personas en una fila. Queremos asignarle a cada una de ellas un número del 1 al 9 de modo que para cada persona (excepto los extremos), la diferencia entre los números de sus vecinos izquierdo y derecho no sea divisible por 3. ¿De cuántas formas podemos lograr esto?

Ejercicio 2.14. Encuentre, para $n \in \mathbb{N}$ la cantidad de conjuntos de números enteros entre $-n$ y n (inclusive) que no contienen dos elementos con el mismo valor absoluto.

Ejercicio 2.15. Un cubo de 1 metro se subdivide en 1000 cubitos de 10 por 10 por 10 cm. ¿Cuántos cubitos tienen sus tres coordenadas (fila, columna, altura) distintas?

Ejercicio 2.16. Encuentre la cantidad de números entre 0 y 999999 cuya expresión decimal es una secuencia estrictamente decreciente de dígitos al ser leído de izquierda a derecha.

Ejercicio 2.17. Considere un tablero cuadriculado de $n \times n$ casilleros. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar en dicho tablero una ficha roja y una ficha azul de forma que no queden en casilleros contiguos (horizontal o verticalmente)? ¿Cómo cambia su respuesta si se desean ubicar dos fichas blancas indistinguibles que cumplan la propiedad anterior?

Ejercicio 2.18. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Encuentre una fórmula para el número de divisores positivos de n en función de su descomposición prima.

Ejercicio 2.19. Pruebe combinatorialmente que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_k \binom{n}{2k} = \sum_k \binom{n}{2k+1} + [\![n = 0]\!]$$

[2] Piense que está *poniendo* los libros uno a uno en el librero.
[3] Para el lado derecho piense que está *sacando* los libros uno a uno del librero.

Ejercicio 2.20. Pruebe combinatorialmente que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k!k = n! - 1$$

Ejercicio 2.21. Demostrar combinatorialmente que para todo $n, k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} k! \leq n^n, \qquad \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) \geq \sum_{j=1}^{k} \binom{n}{j}.$$

Ejercicio 2.22. Una torre es una pieza de ajedrez que puede atacar a piezas en su misma fila o columna. Responda las siguientes preguntas en orden (no se salte partes, use la solución más simple que encuentre para cada una, justificándola apropiadamente)

1. Sea $k \in \mathbb{N}$ ¿De cuántas maneras se pueden ubicar k torres indistinguibles en un tablero rectangular de $k \times k$ casilleros de modo tal que ninguna torre pueda atacar a otra?
2. Sean $k, n \in \mathbb{N}$ ¿De cuántas maneras se pueden ubicar k torres indistinguibles en un tablero rectangular de $n \times n$ casilleros de modo tal que ninguna torre pueda atacar a otra?
3. Sean $k, n, m \in \mathbb{N}$ ¿De cuántas maneras se pueden ubicar k torres indistinguibles en un tablero rectangular de $n \times m$ casilleros de modo tal que ninguna torre pueda atacar a otra?

Capítulo 3

Composiciones y Particiones enteras. Caminos.

3.1. Composiciones de un entero.

Definición 3.1. Sean $n, k \in \mathbb{N}$.
Una **composición** de n en k partes es una solución x de $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ con $x_i \in \mathbb{N}^+$.
Una **composición débil** de n en k partes es una solución x de $x_1 + \cdots + x_k = n$ con $x_i \in \mathbb{N}$. Es decir, permitimos que algunas partes sean 0.

Denotamos por $\mathrm{COM}(n, k) = \{x \in [n]^k : \sum x = n\}$ al conjunto de todas las composiciones de n en k partes y usamos $\mathrm{com}(n, k) = |\mathrm{COM}(n, k)|$. Similarmente, denotamos por $\mathrm{WCOM}(n, k) = \{x \in ([n] \cup \{0\})^k : \sum x = n\}$ al conjunto de todas las composiciones débiles de n en k partes y llamamos $\mathrm{wcom}(n, k) = |\mathrm{WCOM}(n, k)|$.

Además, llamamos $\mathrm{COM}(n) = \bigcup_k \mathrm{COM}(n, k)$, $\mathrm{WCOM}(n) = \bigcup_k \mathrm{WCOM}(n, k)$.

Ejemplo 3.2. Las composiciones débiles de n en 3 partes se pueden visualizar como la intersección de $\mathbb{Z}_+^3$ con el plano $x + y + z = n$. Las composiciones (fuertes) son aquellas que tienen todas sus coordenadas positivas.

De las figuras anteriores notamos que:

$$\begin{array}{cccccc} \mathrm{wcom}(0,3) = 1 & \mathrm{wcom}(1,3) = 3 & \mathrm{wcom}(2,3) = 5 & \mathrm{wcom}(3,3) = 10 & \mathrm{wcom}(4,3) = 15 & \mathrm{wcom}(5,4) = 21 \\ \mathrm{com}(0,3) = 0 & \mathrm{com}(1,3) = 0 & \mathrm{wcom}(2,3) = 0 & \mathrm{com}(3,3) = 1 & \mathrm{com}(4,3) = 3 & \mathrm{com}(5,3) = 6. \end{array}$$

Ejemplo 3.3. Todas las composiciones de 5, clasificadas por número de partes.

k	$\mathrm{com}(5, k)$	$\mathrm{COM}(5, k)$
1	1	(5)
2	4	$(4, 1); (3, 2); (2, 3); (1, 4)$
3	6	$(3, 1, 1); (1, 3, 1); (1, 1, 3); (2, 2, 1); (2, 1, 2); (1, 2, 2)$
4	4	$(2, 1, 1, 1); (1, 2, 1, 1); (1, 1, 2, 1); (1, 1, 1, 2)$
5	1	$(1, 1, 1, 1, 1)$

No es difícil notar que para todo $n, k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{WCOM}(n, k) = \left(\!\binom{[k]}{n}\!\right)$. Gracias a esto podemos probar el siguiente resultado.

Proposición 3.4. *Para todo $n, k \in \mathbb{N}$ (interpretando $\binom{-1}{0} = 1$)*

$$\mathrm{wcom}(n, k) = \left(\!\binom{k}{n}\!\right) = \binom{n + k - 1}{n}.$$

$$\mathrm{com}(n, k) = [\![k \leq n]\!]\, \mathrm{wcom}(n - k, k)| = [\![k \leq n]\!] \left(\!\binom{k}{n - k}\!\right) = [\![k \leq n]\!] \binom{n - 1}{n - k}.$$

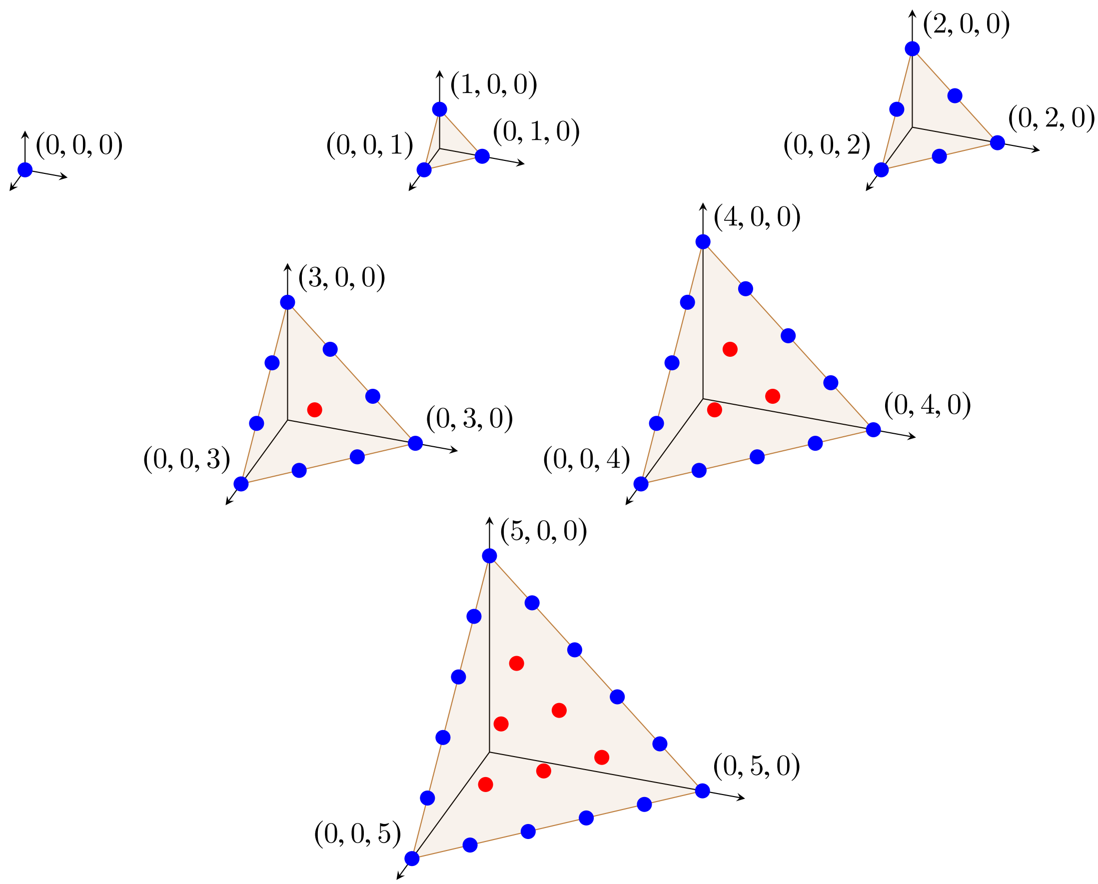


Figura 3.1: Se muestran las composiciones débiles de n en 3 partes, para $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. De ellas, en rojo se muestran las composiciones (fuertes).

Demostración. La primera línea viene de $\mathrm{wcom}(n, k) = \left(\!\binom{k}{n}\!\right)$. La segunda línea sale de que al restar uno de cada parte de una composición de n en k partes se obtiene una composición débil de $n-k$ en k partes. □

Recordemos que cada multiconjunto x (i.e., composición débil) tiene una palabra binaria asociada

$$0^{x(1)}10^{x(2)}1\dots10^{x(n)}.$$

Sea $n \geq 1$. Consideremos ahora una composición (normal) y de n en k partes, por ejemplo, $y = (3, 2, 5, 3, 1) \in \mathrm{COM}(14, 5)$. De la demostración anterior $y' = y - \chi^{[k]} = (y_1, y_2, \dots, y_k) - (1, 1, \dots, 1)$ es una composición débil de $n-k$ en k partes (en el ejemplo, $y' = (2, 1, 4, 2, 0) \in \mathrm{WCOM}(9, 5)$). Llame $w(y)$ la palabra binaria asociada a y'. Es decir, $w(y) = 0^{y(1)-1}10^{y(2)-1}\dots10^{y(n)-1}$ (en el ejemplo: $w(y) = 00101000101$), notamos que $w(y)$ es una palabra binaria de largo exactamente $n-1$. Antes de proseguir notamos que es fácil calcular directamente $w(y)$: los unos marcan el *fin* de cada parte (excepto en la última parte que no tiene 1)

$$(3, 2, 5, 3, 1) \mapsto 001\,01\,00001\,001$$
$$(1, 1, 2, 2, 4, 6) \mapsto 1\,1\,01\,01\,0001\,00000$$

La función w recién descrita, que transforma una composición (de n) en su palabra binaria débil (de largo $n-1$) es una biyección, de lo cual se concluye:

Teorema 3.5. *Para $n \geq 1$, el número de composiciones de n es exactamente 2^{n-1}. En particular, para $n \in \mathbb{N}$*

$$|\operatorname{COM}(n)| = \sum_k \operatorname{com}(n,k) = 2^{n-1}[\![n \geq 1]\!] + [\![n = 0]\!].$$

Es importante notar que, por otro lado, el número de composiciones débiles de n, $|\operatorname{WCOM}(n)|$ es infinito.

La próxima definición da una manera alternativa de interpretar las composiciones de un número natural.

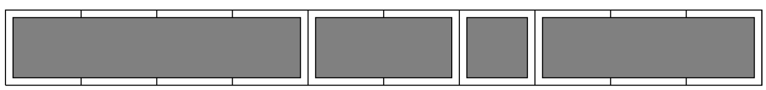
Definición 3.6. Cubrimientos de rectángulos con intervalos. Considere un tablero rectangular $\mathcal{T}$ de $1 \times n$ casilleros (habitualmente denotado como un intervalo: $[1, n]$).

Un rectángulo (o intervalo) de $\mathcal{T}$ es un conjunto no vacío de casilleros consecutivos, habitualmente dibujado como una pieza sólida. Llamamos $[a, b]$ al rectángulo que comienza en el casillero a y termina en el casillero b.

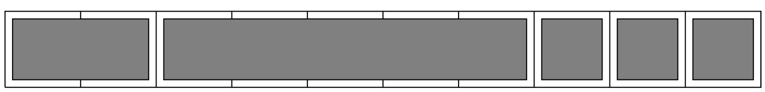
Un cubrimiento de $\mathcal{T}$ por rectángulos es una colección de rectángulos disjuntos cuya unión es $\mathcal{T}$.

Los cubrimientos de $[1, n]$ están en biyección con las composiciones de n (usando x_i como el tamaño de i-ésima pieza del cubrimiento, vista de izquierda a derecha)

Ejemplo 3.7. Los siguientes cubrimientos muestran dos composiciones del número 10.



$(4, 2, 1, 3)$



$(2, 5, 1, 1, 1)$

3.2. Composiciones de Fibonacci.

Una composición x de n donde cada parte tiene tamaño 1 o 2 se llama composición de Fibonacci. Llamemos

$$\mathcal{D}(n) = \{x \in \operatorname{COM}(n) \colon \forall i, x_i \in \{1, 2\}\}$$

al conjunto de tales composiciones y llamamos $d_n = |\mathcal{D}(n)|$.

Lema 3.8. *$d_0 = 1, d_1 = 1$ y para $n \geq 2, d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$. Es decir, $d_n = f_{n+1}$ donde f_n es la sucesión de Fibonacci.*

Demostración. Hay solo 1 composición de 0 y 1 composición de 1 (ambas son de Fibonacci), por lo que $d_0 = 1 = d_1$. Así que sea $n \geq 2$ y sea $x \in \mathcal{D}(n)$. Tomemos la función $\varphi \colon \mathcal{D}(n) \to \mathcal{D}(n-1) \cup \mathcal{D}(n-2)$ dada por

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}) \in \begin{cases} \mathcal{D}(n-1) & \text{si } x_k = 1 \\ \mathcal{D}(n-2) & \text{si } x_k = 2. \end{cases}.$$

La función anterior es claramente biyectiva y prueba que $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$. □

Ejemplo 3.9. Pruebe combinatorialmente que

$$f_{n+1} = \sum_k \binom{n-k}{k}.$$

Demostración. Clasifiquemos las composiciones de n con partes 1 y 2 (hay f_{n+1} de ellas) de acuerdo a cuantos 2 poseen. Si x tiene k dos, entonces tiene exactamente $n-k$ partes. Para determinar x solo se debe describir cuales partes tienen 2 elementos. Esta opción se puede tomar de $\binom{n-k}{k}$ maneras. Sumando sobre k se tiene el resultado.

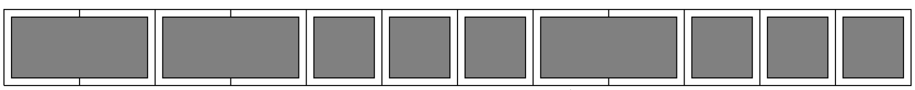
Una solución alternativa es clasificar de acuerdo a cuantos 1 poseen. Suponga que x tiene k unos, entonces si disminuye en 1 cada parte que es 1, obtiene una composición débil de $n-k$ en partes de tamaños 0 y 2, usando exactamente k ceros. □

A veces conviene imaginarse las composiciones de Fibonacci de n como particiones del rectángulo $1\times n$ en monominós (1×1) y en dominós (1×2). Usemos esta interpretación en el siguiente ejercicio.

Ejemplo 3.10. Pruebe combinatorialmente que para $n \geq 0$,

$$f_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} f_k.$$

Demostración. El lado izquierdo, f_{n+1} cuenta las particiones de $[1, n]$ en monominós y dominós. Clasifiquemos dichas particiones: Hay una sola partición que no usa dominós. De lo contrario, sea k la posición (en $[1, n-1]$ donde comienza el último dominó).



k

La partición a la derecha de k está predeterminada (es 1 dominó y luego solo monominós). Por otro lado existen f_k maneras de particionar $[1, k-1]$ en monominós y dominós. Esto prueba la proposición. □

3.3. Particiones de un entero

Definición 3.11. Una **partición entera**[1] de $n \in \mathbb{N}$ es una composición $(a_1, \ldots, a_k)$ de n (i.e., $\sum_{i=1}^{k} a_i = n$) cuyas partes son débilmente decrecientes: $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k \geq 1$. Denotamos por $p_k(n)$ al número de particiones de n en **exactamente**[2], y al total lo denotamos $p(n)$. Se acostumbra escribir $a \vdash n$ si a es una partición entera de n.

Ejemplo 3.12. Las 15 particiones de 7, ordenadas por número de partes

k	$p_k(7)$	PART$(7, k)$
1	1	(7)
2	3	$(6,1); (5,2); (4,3)$
3	4	$(5,1,1); (4,2,1); (3,3,1); (3,2,2)$
4	3	$(4,1,1,1); (3,2,1,1); (2,2,2,1)$
5	2	$(3,1,1,1,1); (2,2,1,1,1)$
6	1	$(2,1,1,1,1,1)$
7	1	$(1,1,1,1,1,1,1)$

Observación 3.13. Cada partición de n en k partes está completamente definida por el multiconjunto de n que tiene como elementos los tamaños de las partes. Por ejemplo el multiconjunto $[1, 2, 3, 1]$ representa a la partición $(3, 2, 1, 1)$. De ahí el nombre *partición*: estamos particionando un número n en k partes (números) donde el orden no importa.

[1] ¡Cuidado! El nombre es similar a las particiones de un conjunto pero el sentido es distinto.

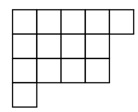
[2] Ojo, algunos autores llaman $p_k(n)$ a las particiones en a lo más k partes.

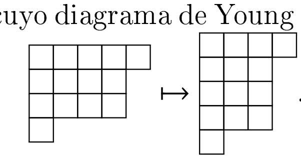
Definición 3.14. El vector de multiplicidades $m \in \mathbb{Z}^n$ de una partición λ de n es el vector que representa el multiconjunto $[\lambda]$, o sea m_i es el número de veces que aparece i en λ.

Por ejemplo, la partición $a = (5, 3, 2, 2, 2, 1)$ de 15 tiene vector de multiplicidades m con $m_1 = 1$, $m_2 = 3$, $m_3 = m_5 = 1$, y $m_j = 0$ para otros valores de j. Es decir, $m = (1, 3, 1, 0, 1, 0^{10})$. La transformación $a \mapsto m$ es biyectiva y notamos que m es vector de multiplicidades de una partición de n si y solo si $\sum_{j=1}^{n} jm_j = n$. Se deduce entonces la siguiente proposición.

Proposición 3.15. *El número de soluciones enteras de* $\sum_{j=1}^{n} jx_j = n; x \geq 0$ *es exactamente* $p(n)$. *El número de soluciones enteras de* $\sum_{j=1}^{n} jx_j = n; x \geq 0$ *con* $\sum_{j=1}^{n} x_j = k$ *es exactamente* $p_k(n)$.

Definición 3.16. El **Diagrama de Young** de una partición $a = (a_1, \ldots, a_k)$ de n es un arreglo de cajas cuadradas ordenadas en k filas horizontales (justificadas a la izquierda) de tamaños $a_1, \ldots, a_k$ respectivamente ordenadas verticalmente.

Por ejemplo, el diagrama de Young de $(5, 4, 4, 1)$ es  .

Definición 3.17. La partición **conjugada** de a es la partición a^* cuyo diagrama de Young es el transpuesto del diagrama de a. Por ejemplo, $(5, 4, 4, 1)^* = (4, 3, 3, 3, 1)$.  .

Notemos que $(\cdot)^*$ es una permutación (de hecho una involución) del conjunto de particiones de n.

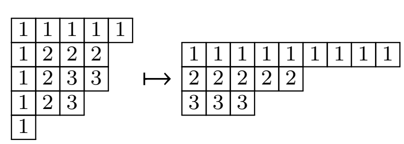
Proposición 3.18. *El número de particiones de* n *en* k *partes es igual al número de particiones de* n *cuya parte más grande tiene largo* k.

Demostración. Basta notar que $()^*$ es una biyección entre ambos conjuntos. □

Podemos usar Diagramas de Young para probar otras relaciones sorprendentes.

Lema 3.19. *El número de particiones de* n *autoconjugadas es igual al número de particiones de* n *con todas sus partes impares y distintas.*

Demostración. Sea π una partición autoconjugada. Crearemos una nueva partición $f(\pi)$ con todas sus partes impares. Borremos el primer gancho (primera fila y columna) y agreguemos los cuadrados borrados como primera fila de $f(\pi)$. Repitamos el proceso borrando (borrar ganchos y agregar filas). Con esto el objeto creado $f(\pi) = (2\pi_1 - 1, 2\pi_2 - 3, \ldots)$ (donde el número de partes es tal que su última entrada no es 0), es una particion con todas sus partes impares y distintas. Claramente el proceso es reversible.

Ejemplo: $(5, 4, 4, 3, 1) \mapsto (9, 5, 3)$ y gráficamente 

□

Observación 3.20. A diferencia de las otras cantidades que hemos definido, encontrar una fórmula explícita, suma finita de cantidades algebráicas, no expresada a través de una recurrencia, para p_n tardó muchísimos años. La primera fórmula finita explícita se debe a Bruinier y Ono y fue publicada en 2011. No es simple, pero permite evaluar eficientemente el valor de p_n para cada n.

3.4. Caminos en retículas

Dos puntos x e y en $\mathbb{Z}^k$ se dicen *adyacentes* si $\|x-y\|_1 := \sum_{i=1}^k |x_i - y_i| = 1$. Un paseo de largo ℓ en $\mathbb{Z}^k$ es una secuencia $x^0, x^1, \ldots, x^\ell$ donde cada punto es adyacente al anterior. Si el paseo no repite vértices, decimos que es un camino en $\mathbb{Z}^k$. Si además tenemos que para cada $i \geq 1$, $x^{i-1} \leq x^i$ coordenada a coordenada, decimos que el paseo es un camino creciente.

Cada paseo en $\mathbb{Z}^k$ de largo ℓ que parte en el origen se puede codificar como palabra $w \in \{1, -1, 2, -2, \ldots, -k, k\}^\ell$, donde $w_i = +a$ si el i-ésimo paso aumentó la coordenada a-ésima de x, y $w_i = -a$ si dicho paso la disminuyó. Por ejemplo, el paseo en $\mathbb{Z}^3$ cuyos puntos son $\{(0,0,0),(0,1,0),(0,1,1),(0,2,1),(-1,2,1),(-1,2,0)\}$ se codifica como $+2, +3, +2, -1, -3$.

Las siguientes propiedades son fáciles de probar usando la descripción anterior.

Proposición 3.21.

1. *El número de paseos de largo ℓ en $\mathbb{Z}^k$ partiendo del origen es $(2k)^\ell$.*
2. *El número de paseos crecientes de largo ℓ en $\mathbb{Z}^k$ partiendo del origen es k^ℓ.*

Caminos en el plano

Enfoquémonos en el caso 2-dimensional.

Lema 3.22. *El número de caminos crecientes de $(0,0)$ a (a,b) es $\binom{a+b}{a}$.*

Demostración. Los caminos crecientes de $(0,0)$ a (a,b) están en biyección con las palabras en $[2]$ que usan exactamente a símbolos 1 y b símbolos 2. □

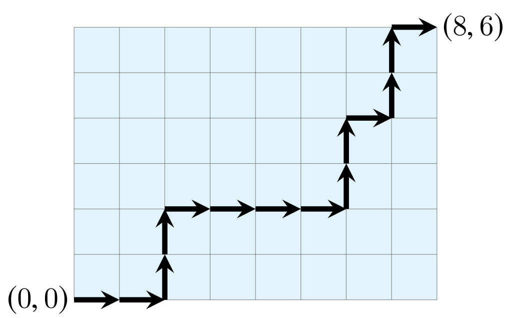


Figura 3.2: Camino creciente de $(0,0)$ a $(8,6)$ asociado a la palabra $w = 11221111221221$, con $|w|_1 = 8$, $|w|_2 = 6$.

En virtud del lema anterior tenemos una interpretación alternativa para los coeficientes binomiales: $\binom{n}{k}$ es el número de caminos crecientes de $(0,0)$ a $(k, n-k)$, y por traslación también es el número de caminos crecientes desde (a,b) a $(a+k, b+n-k)$. Resultará interesante usar esta interpretación para dar demostraciones alternativas de algunas identidades combinatoriales.

Lema 3.23.

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Demostración. Llamemos $CC[(a,b),(c,d)]$ al conjunto de caminos crecientes de (a,b) a (c,d). El lado izquierdo de la expresion cuenta $CC[(0,0),(n,n)]$. Clasifiquemos los caminos en dicho conjunto de acuerdo al punto en el que intersectan la diagonal $x+y=n$, como en la figura.

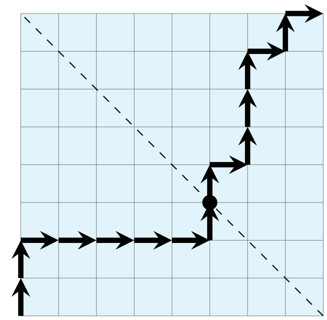


Figura 3.3: Intersección de un camino creciente con la diagonal $x+y=n$

Llamemos S_k a los caminos que pasan por el punto $(k,n-k)$ de la diagonal. Luego evidentemente $\bigcup_{k=0}^{n} S_k$ es una unión disjunta. Ahora notemos que todo camino en S_k es la concatenación de un camino en $CC[(0,0),(k,n-k)]$ con un camino en $CC[(k,n-k),(n,n)]$. Este último tiene *ancho* $n-k$ y alto k. Luego:

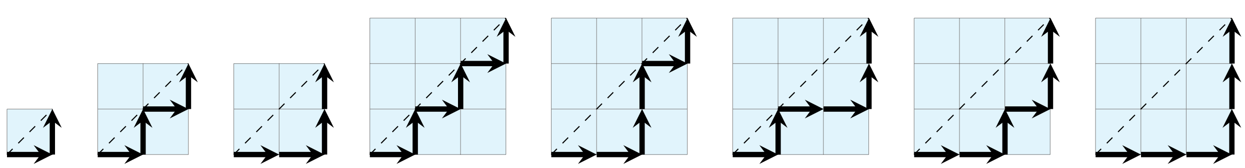
$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} |S_k| = \sum_{k=0}^{n} |CC[(0,0),(k,n-k)]||CC[(k,n-k),(n,n)]| = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+(n-k)}{k}\binom{k+(n-k)}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

□

3.5. Números de Catalán

Definición 3.24. Un camino de Dyck de orden n es un camino creciente en el plano que parte en $(0,0)$, llega a (n,n) y se mantiene siempre bajo la diagonal $x=y$. Llamamos C_n al número de caminos de Dyck de orden n. Los números $C_0, C_1, \dots$ se conocen como números de Catalán.

Notamos que $C_0 = 1$. Los siguientes valores son $C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5$. En la siguiente figura se muestran los caminos de Dyck de orden 1, 2 y 3.

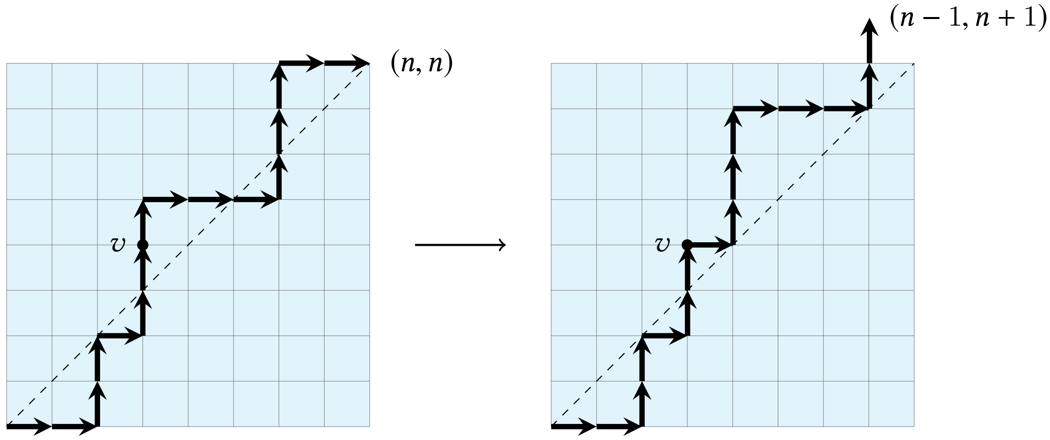


Lema 3.25.

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

Demostración. (Método de reflexión de André) Sea B el conjunto de los caminos crecientes de $(0,0)$ a (n,n) que cruzan la diagonal (es decir los caminos que no son caminos de Dyck). Como hay $\binom{2n}{n}$ caminos crecientes, para probar el resultado basta demostrar que $|B| = \binom{2n}{n-1}$.

Cada camino P en B toca la diagonal $y = x+1$. Considere el primer vértice v de P que toca la diagonal $y = x+1$ y el camino P' que *refleja* todos los pasos que vienen después de v. Es decir, cada paso horizontal se transforma en vertical y viceversa.



P : 1122122 211122211 $\qquad$ P' : 1122122 122211122

Dado que el número de pasos horizontales en P después de v es exactamente uno más que el número de pasos verticales. Al reflejar dicha porción el número de pasos horizontales de P' será 1 menos que los de P, y el número de pasos verticales aumentará en 1. Es decir P' tiene $n-1$ pasos horizontales y $n+1$ pasos verticales. O sea P' es un camino creciente de $(0,0)$ a $(n-1, n+1)$. Más aún el proceso de reflexión es reversible. Es decir de cada camino Q creciente de $(0,0)$ a $(n-1, n+1)$ se puede obtener un camino en B reflejando la parte después del primer vértice v que toca a la diagonal $y = x+1$. Se concluye que $|B| = |CC[(0,0), (n-1, n+1)]| = \binom{2n}{n-1}$. $\square$

Durante el curso, encontraremos varias veces los números de Catalán, por lo que notamos algunas formas equivalentes (que se pueden probar algebráicamente o combinatorialmente).

Observación 3.26. Para $n \in \mathbb{N}$.

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}.$$

3.6. Ejercicios

Ejercicio 3.1. Pruebe nuevamente la identidad de Pascal

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k},$$

usando su interpretación como caminos crecientes en el plano.

Ejercicio 3.2. Pruebe nuevamente la identidad

$$\binom{a+b+1}{a} = \sum_{k=0}^{a} \binom{k+b}{b}$$

usando su interpretación como caminos crecientes en el plano.

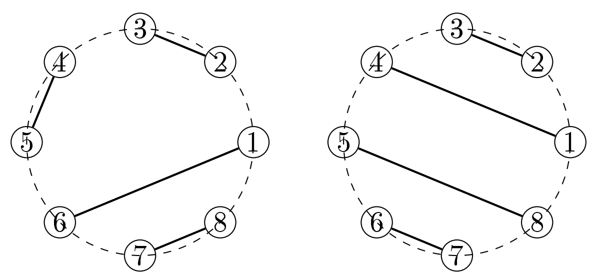
Ejercicio 3.3. Pruebe combinatorialmente y algebráicamente, que los números de Catalán satisfacen la recurrencia

$$\begin{aligned} C_0 &= 1 \\ C_n &= \sum_k C_k C_{n-1-k}, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Ejercicio 3.4. Use la recurrencia del ejercicio anterior y la definición recursiva de los números de Fibonacci para llenar 10 columnas adicionales de la siguiente *tabla* (no escriba los ceros)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17 .
f_n	0	1	1	2	3	5	8	13										
C_n	1	1	1	2	5	14	42	132										

Ejercicio 3.5. Hay $2n$ personas sentadas en una mesa circular. Llame $\tilde{C}_n$ al número de maneras que n parejas darse simultáneamente un apretón de manos suponiendo que ningún par de apretones se cruza. Esta condición es más fácil de entender dibujando la mesa: si se conecta cada par de personas que se dan la mano con un segmento, entonces los n segmentos dibujados no deben intersectarse. Dos ejemplos de configuraciones permitidas para $n = 4$ se encuentran a continuación:



Pruebe que $\tilde{C}_n$ satisface la recurrencia del Ejercicio 3.3 y concluya que $\tilde{C}_n$ es el n-ésimo número de Catalán.

Ejercicio 3.6. Pruebe combinatorialmente y algebráicamente, que todas las siguientes expresiones para números de Catalán son equivalentes:

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}$$

Ejercicio 3.7. Sea $n, k \geq 1$. Pruebe que el número de soluciones enteras del sistema

$$\sum_{j=1}^{k} x_j = n, x \geq 0, \prod_{j=1}^{k} x_j = 0$$

es exactamente

$$\binom{n+k-1}{k-1} - \binom{n-1}{k-1}$$

Ejercicio 3.8. Pruebe combinatorialmente que $\text{com}(n, k) = \text{com}(n, n + 1 - k)$

Ejercicio 3.9. Pruebe combinatorialmente que

$$\text{wcom}(n, k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \text{com}(n, j).$$

Ejercicio 3.10. Muestre que la siguientes recurrencia definen a $\mathrm{wcom}(n,k)_{n,k\geq 0}$

$$\forall n,k \geq 1: \ \mathrm{wcom}(n,k) = \mathrm{wcom}(n,k-1) + \mathrm{wcom}(n-1,k).$$

con valores de borde, $\mathrm{wcom}(0,k) = 1$, para $k \geq 0$ y $\mathrm{wcom}(n,0) = 0$, para $n \geq 1$.

Muestre además que la siguientes recurrencia definen a $\mathrm{com}(n,k)_{n,k\geq 0}$

$$\forall n,k \geq 1: \ \mathrm{com}(n,k) = \mathrm{com}(n-1,k-1) + \mathrm{com}(n-1,k).$$

con valores de borde, $\mathrm{com}(0,0) = 1$, y $\mathrm{com}(n,0) = \mathrm{com}(0,k) = 0$ para $n,k \geq 1$.

Ejercicio 3.11. Use las recurrencias del ejercicio 3.10 para llenar 3 filas adicionales de los siguientes *tablas* (no escriba los ceros)

	k								
$\mathrm{wcom}(n,k)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
n 0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1		1	2	3	4	5	6	7	8
2		1	3	6	10	15	21	28	36
3		1	4	10	20	35	56	84	120
4		1	5	15	35	70	126	210	330
5									
6									
7									

	k										
$\mathrm{com}(n,k)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n 0	1										
1		1									
2		1	1								
3		1	2	1							
4		1	3	3	1						
5		1	4	6	4	1					
6		1	5	10	10	5	1				
7		1	6	15	20	15	6	1			
8											
9											
10											

.

Ejercicio 3.12. Sea $t = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{N}^k$. Para $n \in \mathbb{N}$ encuentre el número de soluciones enteras del sistema

$$\sum_{j=1}^{k} x_j = n, \quad x_i \geq t_i . \forall i \in [k].$$

Ejercicio 3.13. Llame $q(n,k)$ a la cantidad obtenida en el ejercicio anterior para $t = (2,2,\ldots,2)$. Pruebe que

$$\sum_{k\geq 0} q(n,k) = f_{n-1}.$$

La igualdad anterior se puede interpretar como que el número de composiciones de n en partes de tamaño al menos 2 es f_{n-1}. Pruebe este último hecho combinatorialmente.
Indicación: Estudie la palabra binaria débil de cada composición contada.

Ejercicio 3.14. Pruebe combinatorialmente que f_{n+1} cuenta el número de palabras en $\{0,1\}$ de largo n que no tiene a 00 como subpalabra. Compruebe nuevamente el resultado demostrando que este conjunto satisface la recurrencia que define a f_n.

Ejercicio 3.15. Pruebe combinatorialmente que f_{n+1} cuenta el número de formas de cubrir un tablero de $2 \times n$ con n dominós que pueden ser ubicados horizontalmente o verticalmente.

Ejercicio 3.16. Pruebe que

$$f_n = |\{x \in \mathrm{COM}(n,k)\colon\, k \in \mathbb{N}, x_1, x_2, \ldots, x_k \text{ todos impares}\}|.$$

probando que el cardinal del conjunto de la derecha satisface la misma recurrencia que los números de Fibonacci.

¿Puede encontrar una demostración combinatorial?

Ejercicio 3.17. Pruebe combinatorialmente que

$$\sum_k \sum_{a \in \mathrm{COM}(n,k)} (a_1 a_2 \cdots a_k) = f_{2n}.$$

Indicación: Puede comenzar pensando que la suma de la izquierda equivale al número de maneras de particionar el rectángulo de $1 \times n$ casilleros en rectángulos de cualquier tamaño y luego marcar en cada rectángulo un casillero.

Ejercicio 3.18. Sea $n \in \mathbb{N}$. Calcule (en función de cantidades ya definidas) el número de soluciones enteras x del sistema

$$\sum_{j \geq 2} j x_j \leq n; x_j \geq 0.$$

Ejercicio 3.19. Muestre que la siguiente recurrencia define a $(p_k(n))_{n,k\geq 0}$

$$\forall n \geq k \geq 1 : \;\; p_k(n) = p_k(n-k) + p_{k-1}(n-1).$$

con valores de borde, $p_0(0) = 1$; $p_k(0) = p_0(n) = 0$ para $n, k \geq 1$, y $p_k(n) = 0$ para $n < 0$ o $k < 0$.

Ejercicio 3.20. Use la recurrencia del ejercicio anterior para llenar 3 filas adicionales de la siguiente *tabla* (no escriba los ceros)

	k												
$p_k(n)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$p(n)$
n 0	1												1
1		1											1
2		1	1										2
3		1	1	1									3
4		1	2	1	1								5
5		1	2	2	1	1							7
6		1	3	3	2	1	1						11
7		1	3	4	3	2	1	1					15
8		1	4	5	5	3	2	1	1				22
9													
10													
11													

.

Ejercicio 3.21. Pruebe combinatorialmente que para $n, k \in \mathbb{N}$,

$$p_k(n+k) = \sum_{i=0}^{k} p_i(n).$$

Ejercicio 3.22. Pruebe combinatorialmente que el número de particiones de n en a lo más a partes y con parte más grande de tamaño a lo más b es igual a $\binom{a+b}{a}$. **Indicación:** Estudie el diagrama de Young asociado.

Ejercicio 3.23. Pruebe combinatorialmente que para $n, m \in \mathbb{N}^+$,

$$\begin{aligned} p_n(2n) &= p(n), \\ p_{nm}(nm+n) &= p(n). \end{aligned}$$

Ejercicio 3.24. Pruebe combinatorialmente que para $n, m \geq 1$,

$$f_{m+n} = f_m f_n + f_{m-1} f_{n-1}.$$

Ejercicio 3.25. Para $n, k \in \mathbb{N}$, llame $D(n,k)$ al conjunto que contiene todas las particiones (cubrimientos) de un rectángulo de $1 \times n$ en piezas de tamaños en $\{1\times 1, 1\times 2, \ldots, 1\times k\}$. Además, llame $d(n,k) = |D(n,k)|$ y extienda a valores negativos con 0. Pruebe que $d(n,k)$ satisface las recurrencias:

$$\forall n, k \in \mathbb{Z}, \quad d(n,k) = \begin{cases} 0, & \text{si } n < 0 \text{ o } k < 0 \\ 1, & \text{si } n = 0 \\ \sum_{j=1}^{k} d(n-j,k), & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

y

$$\forall n, k \in \mathbb{Z}, \quad d(n,k) = \begin{cases} 0, & \text{si } n < 0 \text{ o } k < 0 \text{ o } (n > 0 = k) \\ 1, & \text{si } n = 0 \\ d(n,k-1) + \sum_{j=0}^{n-k} d(j,k) d(n-k-j,k-1), & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Indicación: Note que el caso $k = 2$ corresponde a las composiciones de Fibonacci. Recuerde como se prueban las identidades análogas en ese caso.

Capítulo 4

Anagramas. Particiones de conjuntos. Distribución de pelotas en cajas

4.1. Anagramas

En esta sección estudiamos cuántas palabras se pueden obtener al permutar las letras de una palabra dada.

Definición 4.1. Sea $w \in A^*$ una palabra. Denotamos por $|w|$ al largo de w, es decir, el único valor k tal que $w \in A^k$. Para $a \in A$, denotamos $\operatorname{Pos}(w, a) = w^{-1}(a) = \{j \in [|w|]\colon w_j = a\}$ al conjunto de posiciones j en las que $w_j = a$, y denotamos por $|w|_a = |\operatorname{Pos}(w, a)|$ al número de veces que a aparece en w. Llamamos $\operatorname{Sop}(w)$ a su alfabeto soporte, es decir a los símbolos a de A, con $|w|_a \geq 1$.

Definición 4.2. Sea $w \in A^*$. Llamamos *anagrama (o permutación) de* w a toda palabra w' que se puede obtener de w al permutar sus letras, y usamos $\operatorname{Per}(w)$ para denotar al conjunto de todas las permutaciones de w. Es decir

$$\operatorname{Per}(w) = \{v \in A^*\colon |v|_a = |w|_a\ \forall a \in A\}.$$

Observación 4.3. Si w tiene todos sus símbolos distintos, entonces $\operatorname{Per}(w) = \operatorname{ord}(\operatorname{Sop}(w))$, y luego $|\operatorname{Per}(w)| = |w|!$.

En general, no es difícil notar que el número de anagramas de una palabra depende exclusivamente de la composición que codifica cuantas repeticiones de cada letra posee la palabra.

Definición 4.4. Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ es una composición débil de $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\binom{\sum \alpha}{\alpha} = \binom{n}{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} := |\operatorname{Per}(1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\ldots k^{\alpha_k})|$$

Proposición 4.5. *Para toda palabra* $w \in A^*$,

$$|\operatorname{Per}(w)| = \binom{|w|}{(|w|_a)_{a\in A}} = \frac{|w|!}{\prod_{a\in A}|w|_a!}.$$

En particular,

$$|\operatorname{Per}(1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\cdots k^{\alpha_k})| = \binom{n}{\alpha} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k)!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_k!}.$$

Ejemplo 4.6. La palabra PAPAS tiene $\binom{5}{2,2,1} = \frac{5!}{2!2!1!} = \frac{120}{4} = 30$ anagramas listados a continuación:
AAPPS, APAPS, APPAS, APPSA, PAAPS, PAPAS, PAPSA, PPAAS, PPASA, PPSAA,
AAPSP, APASP, APSAP, APSPA, PAASP, PASAP, PASPA, PSAAP, PSAPA, PSPAA,
AASPP, ASAPP, ASPAP, ASPPA, SAAPP, SAPAP, SAPPA, SPAAP, SPAPA, SPPAA.

Daremos dos demostraciones de la proposición 4.5. Una por inducción y una combinatorial.

Demostración de la proposición 4.5.

(Demostración por inducción en el tamaño del alfabeto) Para $|A| \leq 1$, $\mathrm{Per}(w) = \{w\}$ y $1 = \frac{1!}{1!} = \frac{0!}{1}$, por lo que hay igualdad. Supongamos que $|A| \geq 2$. Sea $\bar{a}$ un símbolo cualquiera de A y sea $B = A \setminus \{\bar{a}\}$. Para una palabra $v \in \mathrm{Per}(w)$, llamemos $v \setminus \bar{a} \in B^*$ a la subpalabra de v obtenida al borrar las apariciones de $\bar{a}$. Por ejemplo, para $v = 1323221331$, $v \setminus 3 = 122211$, $\mathrm{Pos}(v, 3) = \{2, 4, 8, 9\}$. La asignación $v \mapsto (v \setminus \bar{a}, \mathrm{Pos}(v))$ es una biyección entre $\mathrm{Per}(w)$ y $\mathrm{Per}(w \setminus \bar{a}) \times \binom{[|w|]}{|w|_{\bar{a}}}$. Usando principio del producto e inducción tenemos que

$$|\mathrm{Per}(w)| = \frac{|w \setminus \bar{a}|!}{\prod_{a \in B} |w \setminus \bar{a}|_a!} \cdot \binom{|w|}{|w|_{\bar{a}}} = \frac{|w \setminus \bar{a}|!}{\prod_{a \in B} |w|_a!} \cdot \frac{|w|!}{|w \setminus \bar{a}|! |w|_{\bar{a}}!} = \frac{|w|!}{\prod_{a \in A} |w|_a!}.$$

(Demostración combinatorial).

Reemplacemos cada letra a de w por un par (a, t) donde t es el natural que representa el número de veces que a ha aparecido hasta entonces.

Por ejemplo, si $w = 1323221331$, formamos la palabra $\bar{w} = (1, 1)(3, 1)(2, 1)(3, 2)(2, 2)(2, 3)(1, 2)(3, 3)(3, 4)(1, 3)$. Note que $\bar{w}$ es una palabra del mismo largo con todos sus símbolos distintos. Contemos indirectamente $\mathrm{Per}(w)$, estudiando $\mathrm{Per}(\bar{w})$. Para esto considere la función

$$\varphi\colon \mathrm{Per}(\bar{w}) \to \mathrm{Per}(w) \times \prod_{a \in A} \mathrm{ord}([|w|_a])$$

dada por

$$\varphi((v_1, i_1)(v_2, i_2) \cdots (v_{|w|}, i_{|w|})) = (v, (s_a)_{a \in A})$$

donde $v = v_1 v_2 \ldots v_{|w|}$, y para cada $a \in A$, s_a es la subpalabra de $i_1 i_2 \ldots i_{|w|}$ obtenida al quedarse solo con los i_j tales que $v_j = a$. Por construcción, $|s_a| = |v|_a = |w|_a$ y además, s_a es un ordenamiento de $\{1, 2, \ldots, |w|_a\}$. Siguiendo el ejemplo anterior, para el anagrama

$$x = (1, 2)(2, 1)(3, 1)(2, 3)(3, 4)(1, 3)(1, 1)(3, 2)(2, 2)(3, 3)$$

de $\bar{w}$ se tiene que $\varphi(x) = (v, (s_a)_{a \in [3]})$ con

$$v = 1232311323, s_1 = 231, s_2 = 132, s_3 = 1423.$$

La función φ recién definida es biyectiva, lo que prueba que

$$|w|! = |\mathrm{Per}(\bar{w})| = |\mathrm{Per}(w)| \cdot \prod_{a \in A} |w|_a! \quad \square$$

Observación 4.7. Es directo notar que para $a, b \in \mathbb{N}$,

$$\binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b} = \binom{a+b}{a, b}.$$

Aplicación a caminos crecientes multidimensionales

Teorema 4.8. *El número de caminos crecientes del punto $0 \in \mathbb{Z}^d$ al punto $a \in \mathbb{Z}^d$ es $\binom{\sum a}{a} = \binom{a_1 + \cdots + a_d}{a_1, \ldots, a_d}$.*

Demostración. Usando la codificación natural de un camino creciente como palabra en $[d]$, se tiene que P llega al punto $a \in \mathbb{Z}^d$ si y solo si su palabra asociada en $[d]^*$ es un anagrama de $1^{a_1} 2^{a_2} \ldots d^{n_d}$. $\square$

4.2. Particiones de un conjunto

Definición 4.9. Una secuencia $(A_1, \dots, A_k)$ de conjuntos **no vacíos** y disjuntos par a par tal que $\bigcup_{i=1}^k A_i = A$ se conoce como *partición ordenada* de A. Las partes de una partición ordenada se conocen como bloques.

Las particiones ordenada son el análogo de las composiciones pero para conjuntos, en vez de enteros.

Definición 4.10. A cada partición ordenada $\Pi = (A_1, \dots, A_k)$ de A en k bloques le asociamos la composición x^Π de $|A|$ en k partes que satisface $x_i^\Pi = |A_i|$, para $i \in [k]$.

Proposición 4.11. *Sea $c = (c_1, \dots, c_k)$ una composición de $[n]$. El número de particiones ordenadas $(A_1, \dots, A_k)$ de $[n]$ asociadas a la composición c es igual a*

$$\binom{n}{c_1, \dots, c_k}.$$

Demostración. Basta notar que cada partición ordenada descrita se puede codificar de manera única como una permutación w de la palabra $1^{c_1}2^{c_2}\cdots k^{c_k}$, donde $w_j \in [k]$ representa el único índice tal que $j \in A_{w_j}$. □

Ejemplo 4.12. Hay exactamente $\binom{11}{1,4,4,2} = \frac{11!}{24^2 \cdot 2} = 34650$ formas de separar un equipo de fútbol en un arquero, cuatro defensas, 4 mediocampistas y 2 delanteros.

Ejemplo 4.13. Las particiones ordenadas del conjunto $\{a, b, c, d\}$ (en la tabla se eliminan las llaves para alivianar notación)

Composición	Cantidad	Partición ordenada
(4)	$\binom{4}{4} = 1$	$(abcd)$
$(3,1)$	$\binom{4}{3,1} = 4$	$(abc,d); (abd,c); (acd,b); (bcd,a)$
$(1,3)$	$\binom{4}{1,3} = 4$	$(d,abc); (c,abd); (b,acd); (a,bcd)$
$(2,2)$	$\binom{4}{2,2} = 6$	$(ab,cd); (ac,bd); (ad,bc); (bc,ad); (bd,ac); (cd,ab)$
$(2,1,1)$	$\binom{4}{2,1,1} = 12$	$(ab,c,d); (ab,d,c); (ac,b,d); (ac,d,b); (ad,b,c); (ad,c,b)$
		$(bc,a,d); (bc,d,a); (bd,a,c); (bd,c,a); (cd,a,b); (cd,b,a)$
$(1,2,1)$	$\binom{4}{1,2,1} = 12$	$(c,ab,d); (d,ab,c); (b,ac,d); (d,ac,b); (b,ad,c); (c,ad,b)$
		$(a,bc,d); (d,bc,a); (a,bd,c); (c,bd,a); (a,cd,b); (b,cd,a)$
$(1,1,2)$	$\binom{4}{1,1,2} = 12$	$(c,d,ab); (d,c,ab); (b,d,ac); (d,b,ac); (b,c,ad); (c,b,ad)$
		$(a,d,bc); (d,a,bc); (a,c,bd); (c,a,bd); (a,b,cd); (b,a,cd)$
$(1,1,1,1)$	$\binom{4}{1,1,1,1} = 24$	$(a,b,c,d); (a,b,d,c); (a,c,b,d); (a,c,d,b); (a,d,b,c); (a,d,c,b)$
		$(b,a,c,d); (b,a,d,c); (b,c,a,d); (b,c,d,a); (b,d,a,c); (b,d,c,a);$
		$(c,a,b,d); (c,a,d,b); (c,b,a,d); (c,b,d,a); (c,d,a,b); (c,d,b,a);$
		$(d,a,b,c); (d,a,c,b); (d,b,a,c); (d,b,c,a); (d,c,a,b); (d,c,b,a)$

Definición 4.14. Un conjunto $\{A_1, \dots, A_k\}$ formado por conjuntos **no vacíos** y disjuntos par a par tal que $\bigcup_{i=1}^k A_i = A$ se conoce como *partición* (no ordenada) de A.

Las particiones de A son el análogo de las particiones de enteros, pero para conjuntos.

Definición 4.15. A cada partición no ordenada $P = \{A_1, \dots, A_k\}$ de A en k bloques le asociamos la partición (entera) x de $|A|$ que codifica los tamaños (ordenados de mayor a menor) de los bloques de P. Además, si m_i denota el número de bloques de tamaño i en P (es decir, $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es el vector de multiplicidades de x), diremos que P tiene *tipo* $m = (m_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Proposición 4.16. *Sea $a = (a_1, \ldots, a_k)$ una partición de n y sea $m = (m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ su vector de multiplicidades (es decir, número de veces que aparece i en a). El número de particiones de $[n]$ de tipo m (o equivalentemente, el número de particiones de $[n]$ asociadas a la partición a) es*

$$\binom{n}{a_1, \ldots, a_k}\frac{1}{m_1! \cdots m_n!}.$$

Demostración. Hay $\binom{n}{a_1,\ldots,a_k}$ formas de elegir una partición ordenada de $[n]$, (es decir, la parte i tiene a_i elementos). Sin embargo si reordenamos las partes que tienen el mismo tamaño obtenemos la misma partición de $[n]$. □

Ejemplo 4.17. Hay exactamente $\binom{9}{2,2,2,3}\frac{1}{3!1!} = \frac{9!}{2^5 3^2} = 1260$ formas de dividir un grupo de 9 personas en 3 grupos de trabajos de tamaño 2 y un grupo de trabajo de tamaño 3, donde los grupos de trabajo son no etiquetados.

Estudiemos un poco más las particiones.

Definición 4.18. Denotemos por $\mathcal{P}(n, k)$ al conjunto de todas las particiones no ordenadas de $[n]$ en k bloques no vacíos.

Definición 4.19. Números de Stirling del segundo tipo. Los valores $S(n, k) = |\mathcal{P}(n, k)|$ se conocen como números de Stirling del segundo tipo[1].

Calcular estos números no es una tarea directa. Algunos casos son simples pero tendremos que esperar un poco para obtener una respuesta más satisfactoria.

Observación 4.20. Se cumple que:

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $S(n, n) = 1$.
2. Para $n, k > 0$, $S(n, 0) = S(0, k) = 0$.
3. Para todo $k > n$, $S(n, k) = 0$.
4. Para todo $n > 1$, $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$.

Proposición 4.21. *Los números* $(\quad S(n, k) \quad)_{n,k\geq 0}$ *están definidos por la siguiente recurrencia:*

$$\forall k, n \geq 1 : \ S(n, k) = kS(n-1, k) + S(n-1, k-1).$$

con valores de borde, $S(0, 0) = 1$, $S(n, 0) = S(0, k) = 0$ *para* $n, k \geq 1$.

Demostración. Sea A el conjunto de las particiones de $\mathcal{P}(n, k)$ donde $\{n\}$ es un bloque en sí mismo y $B = \mathcal{P}(n, k) \setminus A$. Claramente A está en biyección con $\mathcal{P}(n-1, k-1)$ (borrando el bloque $\{n\}$). Además, hay una función k a 1 desde B hasta $\mathcal{P}(n-1, k)$ (dada por la operación "borrar n de su bloque"). □

La siguiente propiedad relaciona las particiones no ordenadas con las particiones ordenadas

Proposición 4.22. *El número de particiones ordenadas de n en k bloques es $k!S(n, k)$.*

Demostración. Cada partición ordenada de $[n]$ en k bloques se obtiene tomando una partición (normal) en $\mathcal{P}(n, k)$ y luego ordenando las k partes. □

En particular, concluimos la siguiente importante propiedad:

[1]Esta cantidad también se denota en algunos libros como $\left\{ n \atop k \right\}$.

Proposición 4.23. *Para A, B conjuntos llamamos* $\mathrm{Sobre}(A, B) = \{f : A \to B : f$ *sobreyectivas*$\}$. *El número de funciones sobreyectivas de* $[n] \to [k]$ *es* $|\mathrm{Sobre}([n], [k])| = k!S(n, k)$.

Demostración. Cada función f sobreyectiva se puede ver como $(f^{-1}(1), \ldots, f^{-1}(k))$ que es una partición ordenada de $[n]$ en k bloques. □

Discutamos un poco más las particiones de $[n]$.

Definición 4.24. Llamamos $B(n)$ al número total de particiones de $[n]$. Los números $(B(n))_{n\in\mathbb{N}}$ se conocen como números de Bell

Tenemos $B(0) = 1$ y $B(n) = \sum_{k=0}^{n} S(n, k)$. La siguiente proposición nos da otra recurrencia para calcular $B(n)$.

Proposición 4.25. *Los números* $B(n)_{n\geq 0}$ *están definidos por la siguiente recurrencia:*

$$\forall n \geq 1 : \; B(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B(k).$$

con valor de borde $B(0) = 1$.

Demostración. Para Π partición de $[n]$ llamemos $\varphi(\Pi)$ al bloque que contiene a n.

$$\begin{aligned} B(n) &= |\{\Pi : \text{partición de } [n]\} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{A \subseteq \binom{[n-1]}{k}} |\{\Pi : \text{partición de } [n], \varphi(\Pi) = A \cup \{n\}\}| \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{A \subseteq \binom{[n-1]}{k}} B(|[n-1] \setminus A|) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B(n-1-k) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B(k). \end{aligned}$$

□

Proposición 4.26. *El número de relaciones de equivalencia distintas que se pueden definir en un conjunto de* n *elementos es igual al número de Bell* $B(n)$.

Demostración. Cada relación de equivalencia $\sim$ en $[n]$ está unívocamente codificada por su partición en clases de equivalencia $[n]/\sim$. □

Definición 4.27. Llamamos $T(n)$ al número total de particiones ordenadas de $[n]$. Los números $(T(n))_{n\in\mathbb{N}}$ se conocen como números ordenados de Bell o números de Fubini.

Tenemos $T(0) = 1$ y $T(n) = \sum_{k=0}^{n} k!S(n, k)$. La siguiente proposición nos da otra recurrencia para $T(n)$.

Proposición 4.28. *Los números de Fubini* $T(n)_{n\geq 0}$ *están definidos por la siguiente recurrencia:*

$$\forall n \geq 1 : \; T(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} T(n-k) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} T(k).$$

con valor de borde $T(0) = 1$.

Demostración. Ejercicio 4.5 □

Definición 4.29. Un preorden total $\preceq$ es una relación refleja, transitiva y total (es decir, es muy similar a un orden total pero se permiten distintos tales que $a \preceq b$ y $b \preceq a$). Por ejemplo, las posiciones relativas en una carrera permitiendo empates en cualquier posición es un preorden total.

Proposición 4.30. *El número de preordenes totales en $[n]$ es igual al número de Fubini $T(n)$.*

Demostración. Es fácil ver que los preordenes totales de $[n]$ están en biyección con las particiones ordenadas de $[n]$ (específicamente, si definimos $a \sim b \iff a \leq b \wedge b \leq a$, entonces $\sim$ es una relación de equivalencia, cuyas clases son los bloques de la partición buscada. El orden de los bloques se obtiene eligiendo cualquier representante de cada clase y usando el orden inducido por $\leq$ en los elementos escogidos. □

Ejemplo 4.31. Formas de barajar un mazo.

Considere un mazo $[n]$ de n cartas inicialmente ordenado. Repita el siguiente proceso t veces:

- Tome la primera carta del mazo y ubíquela en una posición elegida uniformemente al azar.

Demuestre que la probabilidad que el mazo resultante quede ordenado es $\frac{1}{n^t}\sum_{j=0}^{n} S(t,j)$, en particular, que la probabilidad de tener el mazo ordenado después de n pasos es $B(n)/n^n$.

Para entender un poco el ejemplo, codifiquemos los experimentos *al revés* del siguiente modo. Pensemos que el tiempo va hacia atrás y que partimos del mazo ordenado. En cada jugada tomamos una carta al azar del mazo y la ubicamos al principio. Llamemos s_j al valor de la carta que es movida hacia el principio en el j-ésimo paso. Es claro que el vector $s = (s_j)_{j\in[t]}$ codifica todo el proceso. Por ejemplo, si $n = 4$ y $s = (2, 1, 2, 3)$ entonces la secuencia de mazos es la siguiente

1234	mazo ordenado
2134	$s_1 = 2$
1234	$s_2 = 1$
2134	$s_3 = 2$
3214	$s_4 = 3$

Cada secuencia s define naturalmente una partición $\varphi(s)$ de $[t]$ tomando como bloques (sin etiquetar) los conjuntos de indices donde se mueve cada carta. Por ejemplo, tanto $(2, 1, 2, 3)$ como $(3, 1, 3, 2)$ definen la partición $\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}$ (pues las posiciones $\{1, 3\}$ contienen el mismo número, etc.). La secuencia $(4, 4, 4, 4)$ define la partición $\{1, 2, 3, 4\}$, etc. Si llamamos $\mathcal{P}(t, \leq n)$ al conjunto de particiones de $[t]$ en a lo más n partes, la función φ manda secuencias de $[n]^t$ en particiones en $\mathcal{P}(t, \leq n)$ pero no de manera inyectiva.

Veamos que si restringimos esta función a aquellas secuencias que dejan el mazo ordenado, entonces la función es biyectiva. Es decir $|\{\text{Secuencias de largo } t \text{ que dejan el mazo ordenado}\}| = |\mathcal{P}(t, \leq n)|$.

En efecto, tomemos una partición no ordenada Q de $[t]$ en a lo más n partes. Veamos que tiene una sola preimagen $s = s(Q)$ que deja el mazo ordenado. Notamos que la última carta levantada (la t-ésima) debe ser un 1. En particular la parte Q_1 de Q que contiene a t debe provenir de un 1. Luego, $s(Q)$ debe contener un número 1 en todos los índices de Q_1. Prosigamos. La última carta levantada que no está en Q_1 debió haber sido un 2. De aquí se deduce que la parte Q_2 que contiene al mayor índice que no está en Q_1 debe provenir de un 2. Por lo tanto, $s(Q)$ debe contener un 2 en los índices de Q_2. Sucesivamente notamos que la última carta levantada que no está en $\bigcup_{i=1}^k Q_i$ debe ser un $k + 1$, por lo que podemos definir Q_{k+1} como la parte que contiene al mayor índice que no está en $\bigcup_{i=1}^k Q_i$. Una vez que todas las partes estén etiquetadas, concluimos que la secuencia $s(Q)$ que contiene i en los índices de Q_i es la única secuencia s que ordena el mazo tal que $\varphi(s) = Q$.

Por ejemplo, para la partición $Q = \{1, 3, 5\}, \{2, 7\}, \{4\}, \{8\}, \{6\}$. $Q_1 = \{8\}$, $Q_2 = \{2, 7\}$, $Q_3 = \{6\}$, $Q_4 = \{1, 3, 5\}$, $Q_5 = \{4\}$. Luego, $s(Q) = (4, 2, 4, 5, 4, 3, 2, 1)$, cuya secuencia de mazos asociada es:

$$12345678 \to 41235678 \to 24135678 \to 42135678 \to 54213678 \to 45213678 \to 34521678 \to 23451678 \to 12345678$$

Concluimos que el número de secuencias de largo t que ordenan el mazo es igual a $|\mathcal{P}(t, \leq n)| = \sum_{i=0}^{n} S(t, i)$, y en particular la probabilidad de que una secuencia al azar de largo n ordene el mazo es $B(n)/n^n$.

4.3. Las doce formas de distribuir pelotas en cajas.

Queremos estudiar las maneras de repartir a pelotas en b cajas. Lo que hace el problema interesante es si las pelotas son todas iguales o no (distinguibles o indistinguibles), si las cajas son distinguibles o indistinguibles, y si imponemos alguna condición sobre la asignación. Las tres condiciones más interesantes son si la asignación es libre (irrestricta), sobreyectiva (en cada caja hay al menos una pelota) o inyectiva (en cada caja hay a lo más una pelota).

En el fondo, lo que estamos haciendo es contando **funciones** de un conjunto A de a pelotas en un conjunto B de b cajas. Con lo que llevamos del curso podemos llenar la siguiente tabla (llamada habitualmente twelvefold way). El formalismo detrás de la *distinguibilidad* queda como descrito en los ejercicios.

Elementos de A (pelotas)	Elementos de B (cajas)	Arbitrarias	Inyectivas	Sobreyectivas
distinguibles	distinguibles	$\lvert B^A\rvert = b^a$	$\lvert B^{\underline{A}}\rvert = b^{\underline{a}}$	$\lvert \mathrm{Sobre}(A, B)\rvert = S(a, b)b!$
distinguibles	iguales	$\sum_{k}^{b} S(a, k)$	$[\![a \leq b]\!]$	$S(a, b)$
iguales	distinguibles	$\mathrm{wcom}(a, b) = \left(\!\!\binom{b}{a}\!\!\right)$	$\binom{b}{a}$	$\mathrm{com}(a, b) = \left(\!\!\binom{b}{a-b}\!\!\right)$
iguales	iguales	$\sum_{k}^{b} p_k(a)$	$[\![a \leq b]\!]$	$p_b(a)$

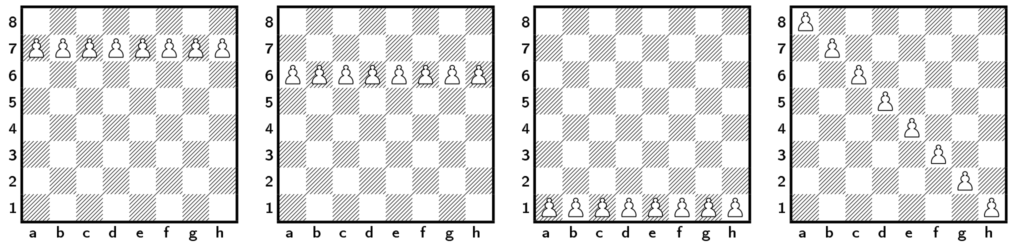
La tabla se simplifica si $a = b = n$.

Elementos de A (pelotas)	Elementos de B (cajas)	Arbitrarias	Inyectivas = Sobreyectivas Biyectivas
distinguibles	distinguibles	n^n	$n!$
distinguibles	iguales	$B(n)$	1
iguales	distinguibles	$\binom{2n-1}{n} = \left(\!\!\binom{n}{n}\!\!\right)$	1
iguales	iguales	$p(n)$	1

4.4. Ejercicios

Ejercicio 4.1. Vuelva a hacer la demostración de la Proposición 4.5, pero ahora hágalo por sobreconteo. Es decir, estudiando una relación bipartita entre $\mathrm{Per}(w)$ y los ordenamientos de $|w|$ símbolos distintos.

Ejercicio 4.2. Para cada una de las siguientes posiciones de un tablero de ajedrez, calcule la cantidad de formas distintas de llevar los 8 peones blancos hasta la fila superior del tablero asumiendo que en cada jugada solo podemos mover un peón blanco una casilla hacia arriba.



Ejercicio 4.3. Pruebe combinatorialmente que

$$n^d = \sum_{a \in \mathrm{WCOM}(n,d)} \binom{n}{a_1, \ldots, a_d}.$$

Ejercicio 4.4. Sea $(n_1, \ldots, n_k) \in \mathrm{WCOM}(n)$. Demuestre que:

$$\binom{n}{n_1, \ldots, n_k} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n_k}{n_k}.$$

Ejercicio 4.5. Pruebe la Proposición 4.28.

Ejercicio 4.6. Reescribamos la recurrencia de Pascal para coeficientes binomiales como sigue. Si $n = a+b$, con $a, b \geq 1$ entonces

$$\binom{n}{a, b} = \binom{n-1}{a-1, b} + \binom{n-1}{a, b-1}.$$

Demuestre algebraica y combinatorialmente la siguiente generalización multinomial. Si $a \in \mathrm{COM}(n,k)$ entonces:

$$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} = \binom{n-1}{a_1-1, a_2, \ldots, a_k} + \binom{n-1}{a_1, a_2-1, \ldots, a_k} + \cdots + \binom{n-1}{a_1, a_2, \ldots, a_k-1}.$$

Ejercicio 4.7. División equitativa distinguible. ¿De cuántas formas se pueden dividir 40 personas en 5 equipos de 8 personas (los equipos están etiquetados)? En general, ¿de cuántas formas se pueden dividir kn personas distinguibles en k equipos etiquetados de n personas?

Ejercicio 4.8. División equitativa indistinguible. ¿De cuántas formas se pueden dividir 40 personas en 5 equipos de 8 personas (donde los equipos son indistinguibles)? En general, ¿de cuántas formas se pueden dividir kn personas distinguibles en k equipos indistinguibles de n personas?

Ejercicio 4.9. Demuestre combinatorialmente que:

$$S(n, n-1) = \binom{n}{2}.$$

$$S(n, n-2) = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}.$$

Ejercicio 4.10. Pruebe combinatorialmente que

$$k!S(n,k) = \sum_{a \in \mathrm{COM}(n,k)} \binom{n}{a_1, \ldots, a_k}$$

Ejercicio 4.11. Encuentre el número de formas de distribuir n pelotas (iguales / distinguibles) en un número arbitrario de cajas (idénticas / distinguibles) de manera sobreyectiva (es decir, no hay cajas vacías).

Su solución para los 4 casos de distinguibilidad, excepto probablemente en un caso, no debe contener signos de sumatoria (intente dar una demostración combinatorial directa de su resultado final para los casos sin suma).

Ejercicio 4.12. Encuentre el número de formas de distribuir un número arbitrario de pelotas (iguales / distinguibles) en k cajas (idénticas / distinguibles) de manera inyectiva (es decir, no hay cajas con dos o más pelotas). Su solución para los 4 casos de distinguibilidad, excepto probablemente en un caso, no debe contener signos de sumatoria (intente dar una demostración combinatorial directa de su resultado final para los casos sin suma).

Ejercicio 4.13. Llame para este ejercicio $\mathrm{sobre}(n,k)$ como el cardinal de $|\mathrm{Sobre}([n],[k])|$ o equivalentemente, el tamaño del conjunto de todas las particiones ordenadas de $[n]$ en $[k]$ bloques.

Pruebe combinatorialmente que la siguiente recurrencia define a $\mathrm{sobre}(n,k)_{(n,k)\geq 0}$:

$$\forall n,k \geq 1\colon \mathrm{sobre}(n,k) = k \cdot \mathrm{sobre}(n-1,k) + k \cdot \mathrm{sobre}(n-1,k-1),$$

con valores de borde $\mathrm{sobre}(0,0) = 1$, y $\mathrm{sobre}(n,0) = \mathrm{sobre}(0,k) = 0$ para $n,k \geq 1$.

Ejercicio 4.14. Use la recurrencia del ejercicio 4.21 y la del ejercicio anterior para llenar 3 filas adicionales de la siguiente *tabla* (no escriba los ceros)

$S(n,k)$	k 0	1	2	3	4	5	6	7	8
n 0	1								
1		1							
2		1	1						
3		1	3	1					
4		1	7	6	1				
5		1	15	25	10	1			
6									
7									
8									

$\mathrm{sobre}(n,k)$	k 0	1	2	3	4	5	6	7	8
n 0	1								
1		1							
2		1	2						
3		1	6	6					
4		1	14	36	24				
5		1	30	150	240	120			
6									
7									
8									

Ejercicio 4.15. Use las tablas del ejercicio anterior o las recurrencias para los números de Fubini y Bell para llenar 5 columnas adicionales de la siguiente *tabla*.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T(n)$	1	1	3	13	75					
$B(n)$	1	1	2	5	15					

Ejercicio 4.16. Anteriormente argumentamos que hay exactamente $k!$ formas de obtener una partición ordenada de $[n]$ en k partes, a partir de una partición no ordenada en $\mathcal{P}(n,k)$ de lo que se dedujo que $\mathrm{sobre}(n,k) = k!S(n,k)$.

¿Por qué el mismo argumento no funciona para particiones de enteros? En otras palabras ¿Por qué el número de composiciones (particiones ordenadas) de n en k partes, $\mathrm{com}(n,k)$ no es necesariamente igual a $k!$ veces el número de particiones de n en k partes, $p_k(n)$?

En particular, argumente combinatorialmente que $\mathrm{com}(n,k) \leq k!p_k(n)$ pero que la igualdad no se tiene necesariamente.

Ejercicio 4.17. Definamos el analogo de composiciones débiles para conjuntos. Una k-partición ordenada débil de $[n]$ es una tupla $(A_1,\ldots,A_k) \in \mathcal{P}([n])^k$ que verifica $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, y $\bigcup_{j=1}^k A_i = [n]$. En otras palabras, es similar a una partición ordenada, pero permitimos partes vacías.

Encuentre el número de k-particiones débiles de $[n]$.

Ejercicio 4.18. En este ejercicio deseamos formalizar un poco más los conceptos de indistinguibilidad basado en la siguiente pregunta ¿Cómo repartimos pelotas de colores en cajas de colores? Tanto para pelotas como para cajas, los colores se pueden repetir, y además, lo único que puede diferenciar un objeto de otro es su color.

Formalmente, un conjunto coloreado de tamaño n y s colores es una partición $\Pi = \{A_1,\ldots,A_s\} \in \mathcal{P}(n,s)$. El conjunto A_i consiste de aquellos elementos de $[n]$ de color i. En principio no nos interesan los nombres de los elementos (en $[n]$) ni el nombre de sus colores (en $[s]$), solo nos interesa distinguir colores distintos, así que nos basta trabajar con la partición entera x de n asociada.
presenta la partición de pelotas, entonces éstas son totalmente distinguibles si y solo si x es la partición $(1^n) := (1,1,\ldots,1) \vdash n$, y son totalmente indistinguibles si $x = (n) \vdash n$.

Sea $\Pi = \{A_i\}_{i\in[s]}$ un conjunto coloreado de pelotas representado por la partición entera $\lambda \vdash n$ y $\Omega = \{B_j\}_{j\in[t]}$ un conjunto coloreado de cajas representado por la partición entera $\mu \vdash m$. Decimos que dos funciones $f,g\colon [n] \to [m]$ son equivalentes bajo color si existe una permutación $\pi\colon [n] \to [n]$ que fija las clases de colores de $[n]$ (es decir, $\pi(A_i) = A_i$ para $i \in [s]$), y una permutación $\omega\colon [m] \to [m]$ que fija las clases de colores de $[m]$ (es decir $\omega(B_i) = B_i$) tal que $g = \omega \circ f \circ \pi$. En este caso escribimos $f \sim g$. Las asignaciones coloreadas de pelotas en cajas son entonces clases de equivalencias bajo la relación $\sim$ (es decir, el número de asignaciones coloreadas es $|[m]^{[n]}/\sim|$.)

Llame $\mathrm{Arb}(\lambda,\mu), \mathrm{Iny}(\lambda,\mu), \mathrm{Sobre}(\lambda,\mu)$ al número de asignaciones coloreadas arbitrarias, inyectivas o sobreyectivas de pelotas en cajas cuyas particiones enteras son respectivamente λ y μ.

En esta sección ya estudiamos como calcular estos parámetros, para todo (λ,μ) en

$$\{\big((1^n),(1^m)\big);\big((1^n),(m)\big);\big((n),(1^m)\big);\big((n),(m)\big)\}$$

Veamos un par de casos diferentes (continuaremos este ejercicio más adelante, cuando visitemos el principio de inclusión-exclusión)

1. Pruebe que para todo $\lambda \vdash n$,

$$\mathrm{Arb}(\lambda,(1^m)) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\!\!\binom{m}{\lambda_k}\!\!\right)$$

   Esto corresponde al número de repartir λ_1 pelotas de color 1, λ_2 pelotas de color 2, y así sucesivamente en m cajas distintas.
2. Pruebe que para todo $\lambda \vdash n$ en s partes

$$\mathrm{Iny}(\lambda,(1^m)) = [\![n \leq m]\!]\binom{m}{m-n,\lambda_1,\ldots,\lambda_s}$$

3. Pruebe que para todo $\mu \vdash m$,

$$\mathrm{Sobre}((1^n), \mu) = S(n, m)\binom{m}{\mu}$$

Verifique que las fórmulas son correctas al reemplazar λ por los casos conocidos (1^n) y (n); y μ por los casos conocidos (1^m) y (m).