MA4006-1 Combinatoria
Profesor: José Soto
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vsalinas@dim.uchile.cl

Auxiliar 6

04 de Septiembre de 2019

P1. *a)* Un grupo de n parejas (es decir $2n$ personas) se desea sentar en una fila ¿De cuántas maneras se pueden sentar de modo que ninguna pareja aparezca consecutiva en la fila?

b) Un grupo de n parejas (es decir $2n$ personas) se desea sentar en una mesa rectangular de n personas por lado (sin cabecera) ¿De cuántas maneras se pueden sentar de modo que ninguna pareja esté frente a frente en la mesa?
Indicación: Para las dos últimas partes use PIE.

P2. Demuestre combinatorialmente que:

a) $$\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = \sum_{i \geqslant 0} \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} n^{\underline{n-i}}$$

b) $$\sum_{k=0}^{n} s(n,k) = [n \in \{0,1\}]$$

Obs: Deduzca que si $n \geqslant 2$, $\sum_{i \geqslant 0} \begin{bmatrix} n \\ 2i+1 \end{bmatrix} = \sum_{i \geqslant 0} \begin{bmatrix} n \\ 2i \end{bmatrix}$

P3. Sean π y τ dos permutaciones en S_n. Decimos que π y τ son conjugadas si existe una permutación ρ tal que $\pi\rho = \rho\tau$.
1. Pruebe que la relación ser conjugados es de equivalencia.
2. Pruebe además que π y ρ son conjugados si y solo si tienen el mismo tipo.
3. ¿Cuántas clases de conjugación tiene S_n?
4. Sea C una clase de conjugación de S_n, pruebe que $|C|$ divide a $n!$.

P4. Decimos que $i \in [n]$ es un récord de una permutación $\pi \in S_n$ si $\pi_i = \text{máx}\{\pi_j : j \leqslant i\}$. Es decir, si al escribir la permutación π como palabra, el i-ésimo símbolo es mayor que todos los anteriores. Por ejemplo, la permutación $\pi = 125374698$ tiene las posiciones 1, 2, 5, 7 y 9 como récords. Demuestre que el número de permutaciones en S_n con exactamente k récords es $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

P5. Demuestre semicombinatorialmente que:

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} m^k = m^{\overline{n}}$$

Para esto siga los siguientes pasos. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Una n-permutación m-coloreada es un par (f, g) donde f es una permutación de $[n]$ y $g : [n] \to [m]$ es una función de "coloreo" tal que cada ciclo de f_1 recibe el mismo color (es decir, tienen igual valor de g). Pruebe directamente que el lado izquierdo de la igualdad cuenta las n-permutaciones m-coloreadas.Pruebe por inducción en n que el lado derecho también cuenta las n-permutaciones m-coloreadas.