**MA4006. Combinatoria. 2019.**
**Profesor: José Soto.**

# Tarea 4 Ver 2

**Fecha límite entrega**: Viernes 20 de Diciembre, 23:59 (si desea eximirse). Se recomienda entregar antes (ayuda a la corrección)
Plazo adicional si no quiere optar a eximirse, 31 de diciembre.

Debe entregarse en PDF (si escanea o fotografía sus soluciones, asegúrese de que sea legible).

Cada hora de atraso descuenta 10 puntos de su puntaje. Puntaje mínimo: $M = 30$

La nota del control 3 se calculará como sigue, donde $C_4$ (máximo 100 puntos) y $C_5$ (máximo 50 puntos) es el puntaje calculado de cada tarea.

$$N = \text{mín}(70, \frac{2(C_4 + C_5)}{3})$$

Cíñase a la política de honestidad y colaboración del curso (LÉALA en el archivo admin.pdf en ucursos). Si colabora con alguien en un problema específico debe indicarlo, **dándole crédito** a la o las otras personas con las que discutió. Si no colabora con nadie en un problema, escriba la frase *sin colaboración*.

Observaciones: Cambios en ejercicios 2d, 3 y 8a.

**Ejercicio 1.** En cada parte describa la recurrencia lineal que satisface el número pedido como función de $n$ y luego encuentre el valor pedido.

(a) ¿Cuántas palabras en $\{0, 1, 2\}^n$ son tales que toda subpalabra maximal en $\{0\}^*$ tiene largo par?
(b) Sean $A$ y $B$ dos conjuntos disjuntos de letras, con $|A| = k > 0$, $|B| = \ell > 0$. ¿Cuántas palabras en $(A \cup B)^n$ hay que no tienen letras de $A$ consecutivas?
(c) Cuántas formas hay de cubrir un tablero de $1 \times n$ con monominós blancos, dominós blancos o blanco-negro (hay 3 formas de poner estas piezas ya que permitimos rotar), y triominós negros.

**Ejercicio 2.** Sean $F(x)$ (resp. $\hat{F}(x)$) la FGO (resp. FGE) de cierta secuencia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Exprese en función de $F(x)$ (resp. $\hat{f}(x)$) las FGO (resp. FGE) de las secuencias $(g_n)_{n\geq 0}$ donde:

(a) $g_n = af_n + b$, con $a, b$ constantes.

(b) $g_n = f_{n+a}$ con $a$ constante natural.

(c) $g_n = P(n)f_n$, con $P(x)$ un polinomio dado.

(d) $\cancel{(g_n)_n = (f_4, f_5, f_6, \dots)}$ (Nota: esta parte fue eliminada por ser implicada por (b))

**Ejercicio 3.** Suponga que un borracho está parado en el punto $n \geq 0$ de la recta real. En cada instante de tiempo, con probabilidad $p$ el borracho se mueve hacia la derecha en una unidad y con probabilidad $q = (1 - p)$, se mueve hacia la izquierda en una unidad. La casa del borracho está en el punto $k$ de la recta real $\underline{\text{con } 0 \leq n \leq k}$. Si el borracho llega al punto $k$, gana. Si, por otro lado, llega al punto 0, se queda dormido y pierde. Llame $c_n$ a la probabilidad de que el borracho gane partiendo desde el punto $n$ y llame $d_n$ al número esperado de pasos necesarios para que el proceso asociado termine.

Escriba recurrencias lineales para $c_n$ y $d_n$, resuélvalas y encuentre fórmulas exactas para ambos valores. Considere por separado el caso $q = p$.

**Ejercicio 4.** Exprese los términos pedidos como coeficientes de una FGO adecuado:

(a) La cantidad de números naturales de $k$ dígitos (en base 10), cuya suma de dígitos es $n$ (notar que el primer dígito no puede ser 0).

(b) Alice desea un número impar de dulces. Bob desea entre 0 y 3 dulces. ¿De cuántas maneras se pueden repartir $n$ dulces **iguales** entre Alice y Bob de manera que al menos 1 de ellos cumpla su deseo? Indicación: *simule* inclusión-exclusión).

(c) El número de triángulos no congruentes con lados enteros y perímetro igual a $n$.
**Ind:** Justifique que es igual al número de soluciones de $x_1 + x_2 + x_3 = n; x_1 \geq x_2 \geq x_3; x_1 < x_2 + x_3$. Luego cambie de variables de manera adecuada para encontrar un sistema de ecuaciones que pueda resolver.

**Ejercicio 5.** Encuentre, usando FGE, una fórmula cerrada para la cantidad pedida en cada caso:

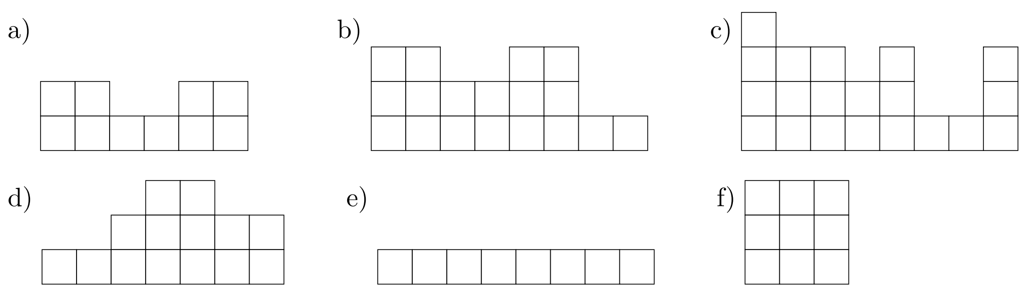
(a) La cantidad de números naturales de $n$ dígitos (en base 10), con todos sus dígitos impares y tal que 5 y 9 aparecen un número par de veces cada uno.

(b) Alice desea un número impar de dulces. Bob desea entre 0 y 3 dulces. ¿De cuántas maneras se pueden repartir $n$ dulces **diferentes** entre Alice y Bob de manera que al menos 1 de ellos cumpla su deseo?

Indicación: *simule* inclusión-exclusión. En este ejercicio no necesita extraer la fórmula cerrada: la FGE es suficiente.

(c) Para $n \in \mathbb{N}$ determine el número de caminos crecientes en $\mathbb{Z}^3$, partiendo de $(0,0,0)$, cuyo punto final $(a,b,c)$ satisfaga $a+b+c=n$, $a$ es par, $b \geq 1$.

**Ejercicio 6.** Un poliominó es un skyline si está formado por un **piso**: un intervalo horizontal (que puede ser vacío) de cuadrados, y cada cuadrado fuera del piso tiene un cuadrado bajo él. Sirve pensar en el borde que forman edificios en una ciudad. Un skyline es una pirámide si cada nivel horizontal sobre el piso es un intervalo de cuadrados consecutivos. Por ejemplo, todos los siguientes son skylines, pero solo d), e) y f) son pirámides.




(a) Usando el método simbólico encuentre la FGO de los skylines donde la función de peso es el número de cuadrados (área). Encuentre una fórmula cerrada para el número de skylines con $n$ cuadrados.
(b) Usando el método simbólico encuentre la FGO de las pirámides donde la función de peso es el número de cuadrados (área). **Indicación:** Identifique la primera columna de tamaño máximo y úsela para dividir la pirámide en tres partes.

**Ejercicio 7.** Sea $n$ un número positivo. Demuestre que los siguientes eventos tienen la misma probabilidad:

(i) Al elegir una permutación $\pi$ de $[n]$ al azar de manera uniforme, que $\pi$ tenga un número par de ciclos, todos de largo impar.

(ii) Tirar una moneda $n$ veces y que ocurran exactamente $n/2$ caras.

**Ejercicio 8.** Use el método **Snake Oil** para encontrar fórmulas cerradas para las siguientes expresiones (para $n \geq 0$)

$$\sum_{k \geq 0} \binom{k}{n-k}$$

$$\sum_{i} \binom{n}{i} \binom{2n}{n-i}$$

**Indicación:** Puede ser más sencillo generalizar la segunda a $\sum_i \binom{n}{i}\binom{m}{r-i}$

**Ejercicio 9.** Use el método simbólico no etiquetado para encontrar el número de árboles planos enraizados con $n$ nodos tales que cada nodo interno tiene o bien exactamente 3 hojas, o bien una secuencia de al menos 2 árboles.

**Ejercicio 10.** En este problema probaremos indirectamente la **fórmula de Cayley** para el número $t_n$ de árboles enraízados y etiquetados en $n$ vértices. Llame $\hat{T}(x)$ a la FGE de los árboles enraízados (no consideramos árbol enraizado al árbol vacío).

Para esto estudiaremos primero la clase etiquetada de los *digrafos funcionales*. Un digrafo funcional es un digrafo $G = ([n], E)$ donde cada $i \in [n]$ tiene grado de salida $d^+(i) = |\{j \colon (i, j) \in E\}| = 1$. Es fácil ver que los digrafos funcionales codifican de manera única el conjunto de las funciones $[n]^{[n]} = \{\varphi \colon [n] \to [n]\}$, ya que para cada función $\varphi \in [n]^{[n]}$ creamos el digrafo $G_\varphi = ([n], E)$ donde $(i, j) \in E \iff \varphi(i) = j$.

(a) Escriba la FGE $\hat{F}(x)$ de la secuencia $f_n$ de digrafos funcionales en $n$ nodos. **Indicación:** Esto es directo ya que usted conoce $f_n$.

(b) Argumente en pocas palabras que todo digrafo funcional se puede obtener como una colección de componentes débilmente conexas, donde cada componente consiste en un ciclo dirigido $C = (v_1, \ldots, v_k)$ $(k \geq 1)$ y una colección de árboles no vacíos dirigidos hacia su raiz $T_1, T_2, \ldots, T_k$ donde la raíz de $T_i$ es $v_i$ para todo $i \in [k]$.

(c) Use la parte anterior para probar que

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{1 - \hat{T}(x)}. \tag{1}$$

**Indicación:** La parte anterior implica que cada componente es un ciclo dirigido de árboles no vacíos.

(d) Usando el método simbólico escriba la ecuación que define $\hat{T}(x)$. Deduzca de esta ecuación que

$$1 + x\hat{T}'(x) = \frac{1}{1 - \hat{T}(x)} \tag{2}$$

(e) Usando las partes (a), (c) y (d), concluya que

$$\hat{T}(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-1} x^n}{n!}. \tag{3}$$

y deduzca que $t_n = [\![n \geq 1]\!] n^{n-1}$.