MA4006. Combinatoria. 2019.
Profesor: José Soto.

Tarea 5

Fecha límite entrega: Viernes 20 de Diciembre, 23:59 (si desea eximirse). Se recomienda entregar antes (ayuda a la corrección)
Plazo adicional si no quiere optar a eximirse, 31 de diciembre.

Debe entregarse en PDF (si escanea o fotografía sus soluciones, asegúrese de que sea legible).

Cada hora de atraso descuenta 10 puntos de su puntaje. Puntaje mínimo: $M = 30$

La nota del control 3 se calculará como sigue, donde C_4 (máximo 100 puntos) y C_5 (máximo 50 puntos) es el puntaje calculado de cada tarea.

$$N = \text{mín}(70, \frac{2(C_4 + C_5)}{3})$$

Cíñase a la política de honestidad y colaboración del curso (LÉALA en el archivo admin.pdf en ucursos). Si colabora con alguien en un problema específico debe indicarlo, **dándole crédito** a la o las otras personas con las que discutió. Si no colabora con nadie en un problema, escriba la frase sin colaboración.

Observaciones: Cambios en ejercicios 2d, 3 y 8a.

Ejercicio 1. Interpretamos las aristas de un camino creciente en el plano como palabras en $\{R, U\}^*$ donde R es un paso a la derecha y U un paso hacia arriba. Definimos los siguientes clases de caminos crecientes (las definiciones no dependen del punto de partida, pero es conveniente fijar coordenadas de modo que partan en $(0, 0)$). Los pesos de R y U son 1 en todas las clases.

- Clase atómica derecha: $\mathcal{R} = \{R\}$. Clase atómica arriba $\mathcal{U} = \{U\}$. Caminos con un solo paso (derecha o arriba).
- Caminos de Dyck: $\mathcal{D}$. Caminos que se mantiene débilmente bajo la diagonal, y terminan en la diagonal.
- Puentes: $\mathcal{B}$. Caminos que terminan en la diagonal.
- Meandros: $\mathcal{M}$. Caminos que se mantienen débilmente bajo la diagonal.

Notamos que si un camino de Dyck es no vacío entonces debe empezar con un paso derecha, luego debe mantenerse estrictamente bajo la diagonal y eventualmente debe tocar la diagonal con un paso arriba. En ese momento el camino vuelva estar en la diagonal y puede repetir el proceso. Es decir cada camino de Dyck es una secuencia de 0 o más caminos como el descrito antes. De aquí, se deduce la ecuación funcional como clases no etiquetadas:

$$\mathcal{D} = \text{Seq}(\mathcal{R} \times \mathcal{D} \times \mathcal{U})$$

Que se traduce en $D(x) = \frac{1}{1-(x \cdot D(x) \cdot x)}$, o bien $-x^2 D(x)^2 + D(x) - 1 = 0$, y luego $D(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x^2} = C(x^2)$, donde $C(x)$ es la FGO de los números de Catalán. Se deduce, como es de esperarse, que hay $d_n = [n \text{ par}] C_{n/2}$ caminos de Dyck de largo n.

(a) Explique e interprete combinatorialmente la factorización alternativa $\mathcal{D} = \mathcal{E} + \mathcal{R} \times \mathcal{D} \times \mathcal{U} \times \mathcal{D}$.

(b) Escriba una ecuación para la clase de los puentes en función de la clase de caminos de Dyck (observe que cada vez que el camino cruza la diagonal, se tiene o bien un camino de Dyck o su reflejo). Deduzca su FGO $B(x)$ y calcule explícitamente b_n.

(c) Escriba una ecuación para la clase de los meandros en función de la clase de caminos de Dyck (observe para cada k, la última vez que el camino visita la diagonal $y = x - k$, ¿qué debe venir después?). Deduzca su FGO $M(x)$ y calcule explícitamente m_n.

Ejercicio 2.

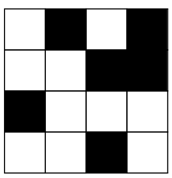
(a) Demuestre la siguiente versión extendida del principio del palomar. Sea $q = (q_1, \ldots, q_k) \in \mathrm{WCOM}(m, k)$ con $m > n$ y sea $f : [n] \to [k]$ una asignación que envía n objetos en k casilleros. Demuestre que existe algún casillero $i \in [k]$ tal que el número de objetos que recibe, $|f^{-1}(\{i\})|$, es al menos $q_i + 1$.

(b) Sea $n \geq 2$. Una matriz de $n \times n$ casilleros que pueden ser blancos o negros se dice antisimétrica si para cada (i, j) con $i \neq j$, el casillero (i, j) y el casillero (j, i) reciben colores distintos (uno es blanco y el otro es negro). La diagonal $\{(i, i) : i \in [n]\}$ es blanca.

Una matriz se dice pesada si existe una columna i con al menos $i + 1$ casilleros negros.

Demuestre que si se pintan de negro $n + 1$ casilleros blancos de una matriz M antisimétrica siempre se obtiene una matriz pesada.

Ejemplo: Considere la cuadrícula antisimétrica M siguiente (las filas y columnas están numeradas en notación estándar de matrices). En este caso se pide probar que no importa cuales $n + 1 = 5$ casilleros adicionales se pinten, es seguro que alguna columna i tiene más de $i + 1$ casilleros pintados. Debe probar que la propiedad se tiene para toda matriz antisimétrica.

$M =$ 

Ejercicio 3.

(a) Sea M una matriz de $n \times n$ entradas con símbolos en $\{-1, 0, 1\}$. Llamamos línea de M a cualquier fila, columna, o a cualquiera de sus dos diagonales (de esquina a esquina). Pruebe que siempre existen 2 líneas con la misma suma.

(b) Pruebe que si se tienen 21 números reales (escritos como decimales infinitos) siempre existen 3 que coinciden en una cantidad infinita de decimales. (Indicación: pruebe primero que cada posición decimal existen al menos tres números que coinciden en esa posición)

Ejercicio 4.

(a) Considere un cuadrado latino M con símbolos en $\mathbb{Z}_n$. Sean $S, T \subseteq \mathbb{Z}_n$ subconjuntos (no necesariamente disjuntos) con $|S| + |T| > n$. Demostrar que todo elemento de $\mathbb{Z}_n$ aparece en la submatriz inducida por las filas en S y las columnas en T (es decir, demostrar que para todo $g \in \mathbb{Z}_n$ existen $s \in S$, $t \in T$ tal que $g = M_{s,t}$.

(b) Sea $(G, \cdot)$ un grupo finito (no necesariamente abeliano), y un subconjunto $S \subseteq G$ con tamaño al menos $|G|/2+1$. Demuestre que todo elemento de G se escribe como producto de dos elementos en S.

Ejercicio 5. Un cuadrado latino es auto-ortogonal si es ortogonal con su cuadrado traspuesto.

(a) Pruebe que si A es un cuadrado latino auto-ortogonal entonces todas las entradas A_{ii} son todas distintas.

(b) Encuentre un cuadrado latino auto-ortogonal de tamaño 4×4.

(c) Use el cuadrado latino encontrado anteriormente para encontrar un cuadrado latino auto-ortogonal de tamaño $4^k \times 4^k$ para todo $k > 1$. Indicación: Intente las operaciones que conoce para crear cuadrados latinos a partir de cuadrados latinos más pequeños.