Auxiliar # 1 - Trigonometría e introducción a la cinemática
FI1000 INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA CLÁSICA

Manuel Torres Valdebenito

Universidad de Chile - Departamento de Física

Jueves 2 de Abril

Contenido

Presentación del curso

Bienvenidos!!

Este curso se dicta durante el primer semestre de malla del plan común, en el curso se abordarán temas fundamentales de la física clásica (Newtoniana) tales como:

1. Cinemática
2. Leyes de Newton
3. Leyes de conservación (energía y momentum)
4. Sistemas de partículas
5. Sólidos rígidos
6. Fluídos

El libro a utilizar será (publicado en material docente)

- Massmann y Muñoz- Introduccion a la Mecanica- Fac de ciencias UCH

Para contactarme podrán enviarme mails a

- manuel.torres@ug.uchile.cl

Trigonometría

Identidades trigonométricas básicas

Ya definidas las funciones trigonométricas (6), es posible comenzar a deducir identidades que cumplen, para iniciar este estudio se tiene:

- **Propiedades obtenibles de las funciones:** Dado que es posible verificar que la función es impar, cos es par, se obtienen las dos primeras identidades (verán este tema con mayor profundidad en MA1001):

$$sen(\alpha) = -sen(-\alpha)$$

$$cos(\alpha) = cos(-\alpha)$$

  Mientras que, como ambas funciones poseen el mismo comportamiento sinusoidal (osilatorio), no obstante mediante un desfase, se tiene que realizando un "desplazamiento" horizonal es posible igualarlas:

$$sin(\pi/2 - \alpha) = cos(\alpha)$$

- **Identidades pitagóricas:** A partir del teorema de pitágoras es posible demostrar el siguiente resultado:

$$sen(\alpha)^2 + cos(\alpha)^2 = 1$$

  Posteriormente, a partir del resultado anterior, es directo deducir los siguientes dos resultados, que en principio representan lo mismo:

$$tan(\alpha)^2 + 1 = sec(\alpha)^2$$

$$ctg(\alpha)^2 + 1 = csc(\alpha)^2$$

Demostración de identidades pitagóricas

Proof.

Suponiendo que (pues fue visto en cátedra):

$$sen(\alpha)^2 + cos(\alpha)^2 = 1$$

1. Aplicando $\frac{1}{sen^2(\alpha)}$ en ambos lados de la igualdad:

$$\frac{sen(\alpha)^2 + cos(\alpha)^2}{sen^2(\alpha)} = 1 + \frac{cos^2(\alpha)}{sen^2(\alpha)} = \frac{1}{sen^2(\alpha)}$$

$$\Rightarrow 1 + ctg^2(\alpha) = csc^2(\alpha)$$

....

2. Análogamente, aplicado $\frac{1}{cos^2(\alpha)}$ es posible obtener:

$$tan(\alpha)^2 + 1 = sec(\alpha)^2$$

Se propone realizar el desarrollo para verificar ésta identidad.

□

Funciones trigonométricas de sumas y restas de ángulos

A continuación se presentan las identidades para la suma y resta de ángulos a juicio de muchos las más difíciles de recordar y menos intuitivas.

$$sen(\alpha+\beta) = sen(\alpha)cos(\beta) + sen(\beta)cos(\alpha)$$

$$sen(\alpha-\beta) = sen(\alpha)cos(\beta) - sen(\beta)cos(\alpha)$$

. . . .

$$cos(\alpha+\beta) = cos(\alpha)cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta)$$

$$cos(\alpha-\beta) = cos(\alpha)cos(\beta) + sen(\alpha)sen(\beta)$$

. . . .

$$tan(\alpha+\beta) = sen(\alpha+\beta)/cos(\alpha+\beta)$$

$$tan(\alpha-\beta) = sen(\alpha-\beta)/cos(\alpha-\beta)$$

Es posible hallar identidades para todas las funciones trigonométricas, no obstante basta con conocer las de seno y coseno, pues ya a estas alturas sabemos que es posible escribir las demás funciones trigonométricas en términos de seno y coseno.

Funciones trigonométricas de sumas y restas de ángulos

Propuesto: Utilizando las propiedades de seno y coseno, demuestre las identidades de suma/resta de ángulos para la tangente:

$$tan(\alpha + \beta) = sen(\alpha + \beta)/cos(\alpha + \beta)$$

$$tan(\alpha - \beta) = sen(\alpha - \beta)/cos(\alpha - \beta)$$

. . . .

Propuesto: Encuentre alguna expresión para:

$$sec(\alpha + \beta)$$

$$csc(\alpha + \beta)$$

$$ctg(\alpha + \beta)$$

Funciones trigonométricas de semiángulos

A partir de las identidades anteriores (sumas y restas de ángulos), es posible deducir propiedades útiles luego de imponer casos particulares (de forma conveniente) sobre los ángulos α y β.

$$sen(2\alpha) = 2sen(\alpha)cos(\alpha)$$

$$cos(2\alpha) = cos(\alpha)^2 - sen(\alpha)^2$$

Demostración de semiángulo de seno

Se desea probar que $sen(2\alpha) = 2sen(\alpha)cos(\alpha)$:

Proof.

Suponiendo que se cumple que $sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha)cos(\beta) + sen(\beta)cos(\alpha)$, basta con tomar $\alpha = \beta$, teniendo así que:

$$sen(2\alpha) = sen(\alpha)cos(\alpha) + sen(\alpha)cos(\alpha) = 2sen(\alpha)cos(\alpha)$$

□

Demostración de semiángulo de coseno

Se desea probar que $cos(2\alpha) = cos(\alpha)^2 - sen(\alpha)^2$:

Proof.

Suponiendo que se cumple que $cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha)cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta)$, basta con tomar $\alpha = \beta$, teniendo así que:

$$cos(2\alpha) = cos(\alpha)cos(\alpha) - sen(\alpha)sen(\alpha) = cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha)$$

□

Propuesto: Utilizando lo que se acaba de demostrar, intente probar:

$$cos(2\alpha) = 1 - 2sen(\alpha)^2$$

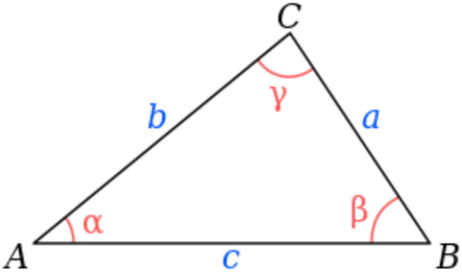
$$cos(2\alpha) = 2cos(\alpha)^2 - 1$$

Teorema del coseno

Teorema

Sea el triángulo $\triangle ABC$ y el ángulo α opuesto a la arista A, entonces:

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BCcos(\alpha)$$

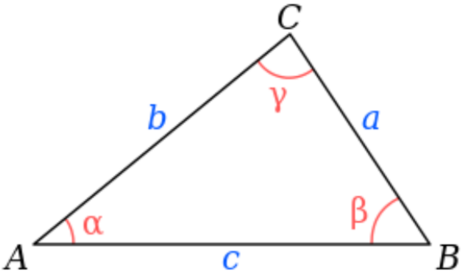


Teorema del seno

Teorema

Sea el triángulo $\triangle ABC$ y los ángulos α, β, γ opuestos a las aristas A, B, C respectivamente, entonces:

$$\frac{A}{sen(\alpha)} = \frac{B}{sen(\beta)} = \frac{C}{sen(\gamma)}$$



Introducción a la cinemática de una partícula

¿Qué es la cinemática?

La cinemática corresponde al estudio de las propiedades que describen el movimiento de las partículas o sistemas (de partículas) sin considerar la causa, en este curso estudiaremos principalmente:

1. Posición
2. Velocidad
3. Aceleración

Para simplificar desde un inicio y abordar el estudio, es necesario introducir conceptos matemáticos nuevos, sin los cuales sería muy difícil avanzar, algunos de ellos son:

1. Definiciones vectoriales y definiciones de magnitud que permiten diferenciar:
   - Desplazamiento vs Distancia recorrida.
   - Velocidad vs rapidez.
2. Definiciones medias y definiciones instantáneas que permiten diferenciar:
   1. Velocidad media vs velocidad instantánea

. . . .

Comentario: Para hallar magnitudes instantáneas, es necesario introducir (mas adelante) herramientas de cálculo diferencial (derivadas), mientras que para trabajar con magnitudes medias, basta con trabajar (muy bien) con cálculos de pendiente de la ecuación de la recta.

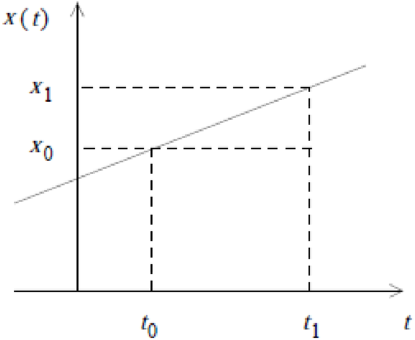
Velocidad media

Motivación:

Para comenzar a trabajar, veremos una de las nociones más simples para el cálculo de velocidad, la velocidad media que se obtiene a partir de la pendiente de una función de posición versus tiempo.

La velocidad media en un intervalo corresponde a la pendiente de la recta que une los dos puntos de un gráfico de posición vs tiempo en el intervalo considerado:

$$\bar{v}_{01} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}$$



Problemas de la auxiliar

Problema 1 - Identidades trigonométricas

Demuestre las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \tag{1}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \tag{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) \tag{3}$$

Desarrollo problema 1.1

Para comenzar, se sabe que $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, luego dividiendo en toda la expresión $\cos^2\alpha$ se tiene que:

$$\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}(= \sec^2\alpha)$$

Luego, aplicando raíz a la igualdad anterior se tiene que:

$$\sqrt{\tan^2\alpha + 1} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Veamos que $\sqrt{\tan^2\alpha + 1} = \sec\alpha$, por lo tanto, reemplazando en el lado derecho de la igualdad, para luego simplificar se tiene que:

$$\frac{\tan\alpha}{\sqrt{\tan^2\alpha + 1}} = \frac{\tan\alpha}{\sec\alpha} = \sin\alpha$$

.

Desarrollo problema 1.2

Veamos que los términos presentes en el lado derecho son:

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$1 - \tan\alpha\tan\beta = 1 - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Ahora basta con dividirlos para construir la expresión del lado derecho de la igualdad, teniendo:

$$\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

Finalmente utilizando la propiedad de suma/resta de ángulos dentro de sin o cos, se concluye que

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \tan(\alpha+\beta)$$

.

Problema 2 - Velocidad promedio

Un conductor maneja su coche durante 10km a una velocidad de 90Km/h, luego otros 10Km maneja a una velocidad de 70Km/h.¿Cuál es la rapidez promedio durante el trayecto de 20Km?

Desarrollo problema 2

Para comenzar, calculemos el tiempo que se demoró en recorrer cada trayecto, para ello basta con conocer la distancia recorrida y la velocidad con la que se recorrió ($\frac{d}{v} = t$).

1. $\frac{10Km}{90Km/h} = \frac{1}{9}h = t_1$
2. $\frac{10Km}{70Km/h} = \frac{1}{7}h = t_2$

Luego el intervalo de tiempo en que se recorrieron 20Km es de $t = t_1 + t_2$, entonces la velocidad promedio será:

$$\bar{v} = \frac{20}{\frac{1}{9} + \frac{1}{7}} Km/h$$

Problema 3 - Velocidad promedio, método gráfico

La figura muestra la posición de una partícula en función del tiempo, encuentre la velocidad promedio en los siguientes intervalos:

1. $0s < t < 4s$.
2. $7s < t < 10s$.
3. $0s < t < 13s$.
4. $10s < t13s$.

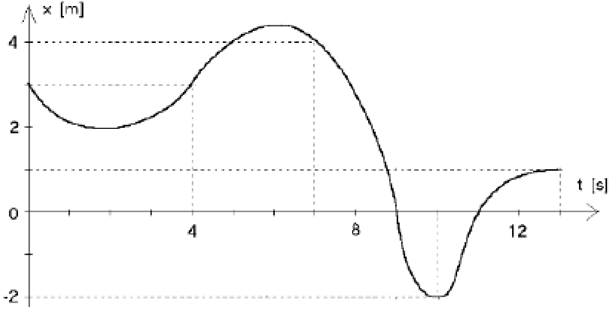


Figure 1: Gráfico de posición vs tiempo.

Desarrollo problema 3

La velocidad media en un intervalo corresponde a la pendiente de la recta que une los dos puntos de un gráfico de posición vs tiempo en el intervalo considerado:

$$\bar{v}_{ab} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_a - x_b}{t_a - t_b}$$

1. En el primer intervalo, $x_i = x_f = 3m$, luego $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \bar{v} = 0m/s$.
2. En el segundo intervalo se tiene que $x_i = 4m$, $x_f = -2m$ y $\Delta t = 3s$, por lo tanto $\bar{v} = -2m/s$.
3. En el tercer intervalo, se tiene que $x_i = 3m$, $x_f = 1m$ y $\Delta t = 13s$, luego $\bar{v} = \frac{-2}{13}m/s$.
4. En el cuarto intervalo, se tiene que $x_i = -2m$, $x_f = 1m$ y $\Delta t = 3s$, luego $\bar{v} = 1m/s$.