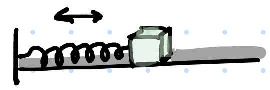
AUXILIAR 2

RESUMEN

Movimiento armónico simple



Se caracteriza por la ecuación de movimiento de la forma:

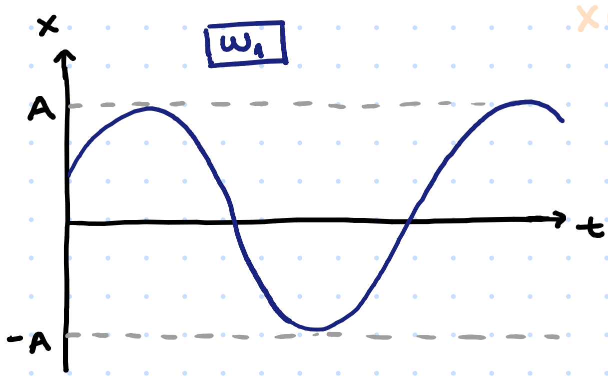
$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

ω_0 es la frecuencia natural del sistema caracterizado por esta E.M.

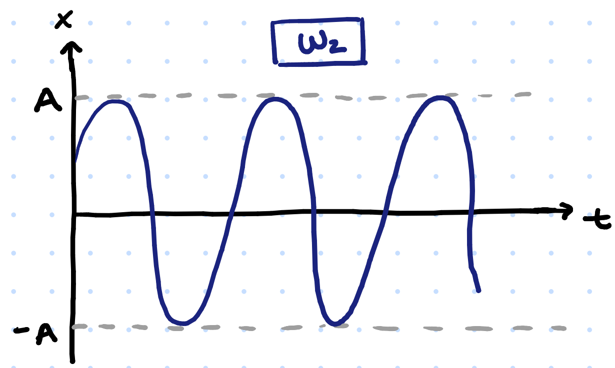
x puede ser cualquier variable que dependa de t. x, y, θ, ϕ

Su solución general

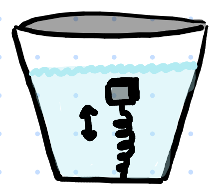
$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \delta)$$



$\boxed{\omega_2 > \omega_1}$



Oscilaciones amortiguadas



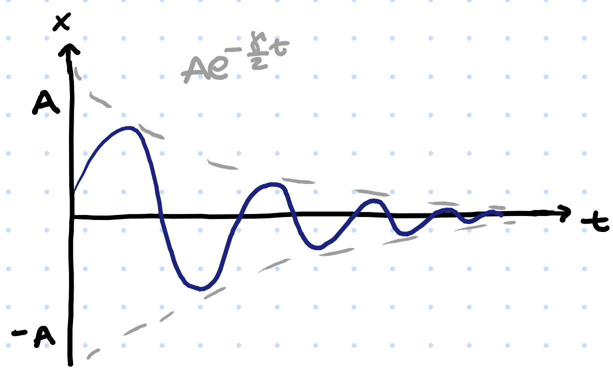
La ecuacion de movimiento es similar a la anterior

$$\boxed{\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

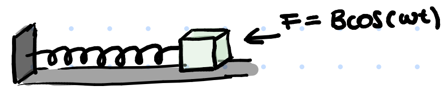
La solución general en este caso es:

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\Omega t + \delta)$$

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$



Oscilaciones forzadas



Al igual que el caso anterior agregamos un termino a la ec. de movimiento

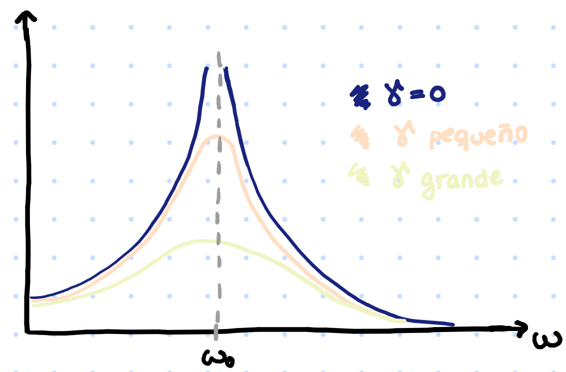
$$\boxed{\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

En este caso la solución es

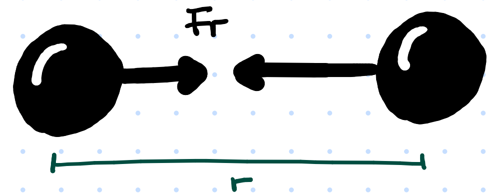
$$x(t) = R\cos(\omega t + \delta)$$

$$R = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)+(\gamma\omega)^2}} \quad \text{y} \quad \tan\delta = \frac{\omega\gamma}{(\omega^2-\omega_0^2)}$$

RESONANCIA



P1 $\quad F_r = A\left(e^{-2b(r-R_0)} - e^{-b(r-R_0)}\right)$



a) Nos piden encontrar la posición de equilibrio, osea $\vec{a}=0$ (aceleración nula)

$$\vec{F} = m\vec{a} = 0$$

cond. de equilibrio.

$$\Rightarrow F_r = 0$$

$$\cancel{A}\left(e^{-2b(r-R_0)} - e^{-b(r-R_0)}\right) = 0$$

$$e^{-2b(r-R_0)} = e^{-b(r-R_0)}$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{+}2\cancel{b}(r-R_0) = \cancel{+}\cancel{b}(r-R_0)$$

$$\Rightarrow r-R_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = R_0}$$

R_0 es la posición de equilibrio

b) Perturbar en torno al equilibrio usando la aprox. de pequeñas osc. consiste en hacer un taylor de orden 1 en torno al eq. en la fuerza

$$F_r = A\left(e^{-2b(r-R_0)} - e^{-b(r-R_0)}\right)$$

$$\Rightarrow F_r\Big|_{r=R_0} \approx F_r(r=R_0) + F'(r=R_0)\cdot(r-R_0) + \cancel{\cdots}$$

$$= A\left(-2be^{-2b(r-R_0)} + be^{-b(r-R_0)}\right)\Big|_{r=R_0} \cdot (r-R_0)$$

$$= -Ab\,(r-R_0)$$

Volvemos a la ecuación de movimiento:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$-Ab(r-R_0) = m\ddot{r}$$

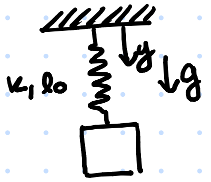
$$\ddot{r} + \frac{Ab}{m}(r-R_0) = 0 \qquad \text{Digamos} \quad x = r-R_0 \Rightarrow \dot{x} = \dot{r} \Rightarrow \ddot{x} = \ddot{r}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{Ab}{m}x = 0$$

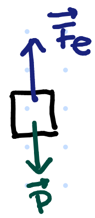
Identificamos ω_0^2

$$\Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{Ab}{m}}}$$

P2



a) Nuevamente nos piden la posición de equilibrio, osea $\vec{a}=0$
Primero hagamos el DCL para identificar las fuerzas.



$$\Rightarrow \vec{F} = \vec{F_e} + \vec{P}$$
$$= -k(y-\ell_0)\,\hat{y} + mg\,\hat{y}$$

Como solo estamos trabajando en 1D podemos omitir estos vectores unitarios.

Reemplazamos la fuerza en la 2da ley de Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

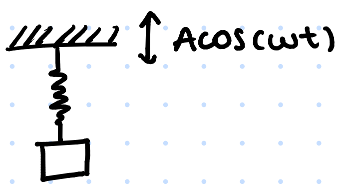
$$-k(y-\ell_0) - mg = m\ddot{y} = 0$$

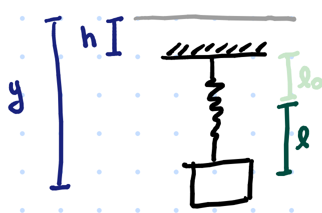
cond. de equilibrio.

$$\Rightarrow -k(y_{eq}-\ell_0) - mg = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{eq} = \frac{mg}{k} + \ell_0}$$

b)





nivel de referencia

Hay que notar en este caso que la elongación del cilindro

$$\ell = (y-h) - \ell_0$$

Con esto el problema lo partimos igual que la parte anterior, el DCL es el mismo

$$\Rightarrow F = ma$$

$$-k\ell + mg = m\ddot{y}$$

$$-k(y-h-\ell_0) + mg = m\ddot{y}$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m}y + g - \frac{k\ell_0}{m} = \frac{kh}{m} = \frac{k}{m}A\cos(\omega t)$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y + \left(g - \frac{k\ell_0}{m}\right) = \frac{k}{m}A\cos(\omega t)$$

Si hacemos el cambio $\bar{y} = y + y_{eq} \Rightarrow \dot{\bar{y}} = \dot{y} \Rightarrow \ddot{\bar{y}} = \ddot{y}$

$$\Rightarrow \ddot{\bar{y}} + \frac{k}{m}\bar{y} = \frac{kA}{m}\cos(\omega t)$$

Tiene la forma de una oscilación forzada

$$\ddot{\bar{y}} + \gamma \dot{\bar{y}} + \omega_0^2 \bar{y} = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

Donde podemos identificar:

$$\gamma = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad y \quad F_0 = kA$$

$$R = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

Por lo tanto la solución es $\bar{y} = R\cos(\omega t + \delta)$

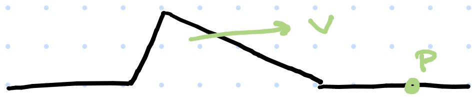
$$\bar{y} = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + (\gamma\omega)^2}}\cos(\omega t + \delta)$$

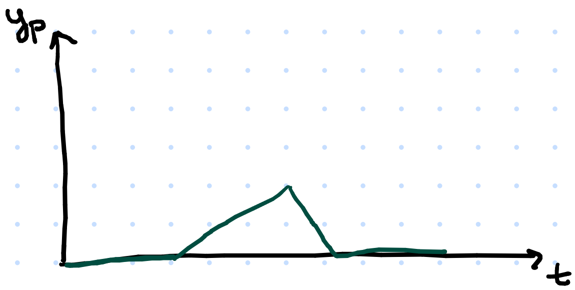
y si queremos la posición desde el nivel de referencia que era el techo antes del terremoto

$$\Rightarrow y = \frac{kA/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + (\gamma\omega)^2}}\cos(\omega t + \delta) - y_{eq}.$$

P3

a)





b) cambian longitud de onda y velocidad de propagación.