Pauta Aux 13

Profesor: Patricio Aceituno

Auxiliares: Nicolas Guerra, Mauricio Rojas y Edgardo Rosas

aquivamos

Vamos a trabajar un poco con el concepto de trabajo,

P1. En este problema veremos como resolver problemas de trabajo y buscaremos hacer que los pasos tengan relacion entre ellos para que tenga sentido.

a) Partiremos calculando el trabajo realizado por al fuerza neta que actúa sobre el anillo, aqui una palabra clave es "neta", que sea la fuerza neta significa que es la resultante de la suma de todas las fuerzas. En este problema tenemos la fuerza que ejerce el campo al anillo mas una fuerza normal que debe ejercerce entre la barra y el anillo para que no escape. Pero como el desplazamiento ocurre solo en el eje x, la fuerza Normal es perpendicular al desplazamiento y por lo tanto no ejerce trabajo. ¿Como vemos esto?

$$\vec{N} = N\hat{j}$$

$$\vec{F}_{campo} = -ax\hat{i} - ay\hat{j}$$

$$\begin{aligned}\vec{F}_{neta} &= \vec{N} + \vec{F} \\ &= -ax\hat{x} + (N - ay)\hat{j}\end{aligned}$$

Dado que la fuerza no es constante, para caluclar el trabajo tenemos que integrar.

$$W = \int_{r_i}^{r_f} \vec{F}_{neta} \cdot d\vec{l}$$

Ahora tenemos que entender que es el dl y cuales son los limites, El dl, es el elemento de linea y depende de el sistema de coordenadas que usemos, ya que la fuerza esta en cartesianas tiene sentido usar el mismo. que seria $= d\vec{l} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$, en nuestro problema, no hay movimiento en el eje y por lo que $dy = 0$. Tambien notamos que parte en $x = L$ y termina en $x = 0$ segun el enunciado, asi como mantiene $y = L$ constante. Así

$$\begin{aligned}
W &= \int_{r_i}^{r_f} \vec{F}_{neta} \cdot d\vec{l} \\
&= \int_{x=L}^{x=0} (-ax\hat{x} + (N - ay)\hat{\jmath}) \cdot dx\hat{\imath} \\
&= \int_{x=L}^{x=0} -ax\, dx \\
&= -\left(\frac{ax^2}{2}\right)\Bigg|_L^0 \\
&= \frac{aL^2}{2}
\end{aligned}$$

Hemos calculado el trabajo ejercido por la fuerza neta.

b) Ahora queremos calcular la rapidez maxima que alcanza el objeto. En este sistema tenemos que hay una fuerza ejerciendo trabajo por lo que la energia no se conserva, de modo que tenemos:

$$E_f - E_i = W$$

Donde E_f es la energia final, E_i la energia inicial, y W el trabajo, como el sistema parte del reposo y no hay algun potencial elastico ni gravitacional, diremos que tiene $E_i = 0$. La energia final, sera solamente cinética. Y por tanto tendremos la relación.

$$\frac{1}{2}mv^2 = W$$

Pero nosotros queremos la maxima velocidad que alcance, que se tendra solamente cuando el trabajo sea máximo. Para eso vemos que cuando cruza el eje $x = 0$, la fuerza del campo, comienza a apuntar en la dirección contraria al desplazamiento y por lo tanto ejerce trabajo negativo, de forma que W decrece monotonamente, por otro lado, notamos que cuando veniamos desde $x = L$, el trabajo aumenta monotonamente hasta llegar a $x = 0$ de manera que ese debe ser el maximo trabajo y debe ser cuando tenga la velocidad maxima. Así:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv_{max}^2 &= \frac{aL^2}{2} \\
v_{max} &= \sqrt{\frac{aL^2}{m}}
\end{aligned}$$

c) Para ver si existe un equilibrio estable, iremos a la ecuacion de movimiento, para el eje

x tenemos:

$$m\ddot{x} = -ax$$
$$m\ddot{x} + ax = 0$$
$$\ddot{x} + \frac{a}{m}x = 0$$

Reconocemos esta ecuacion como la del oscilador armónico, que sabemos tiene un punto de equilibrio estable en $x = 0$, con frecuencia de pequeñas oscilaciones $w_o^2 = \frac{a}{n}$ Con esto termina la pregunta 1

P2. Para este problema, debido a la relativamente poca cantidad de informacion entregada, usaremos una forma un poco con las manos para tomar el problema, a priori solo conocemos: La compresión del resorte A δ_A , lo estirado que esta el resorte B δ_B, el coeficiente de roce cinético μ, la masa m de la caja, las constantes elásticas k_A y k_B respectivamente. Y nos piden calcular la velocidad máxima que alcanza la masa m. Para resolver este problema utilizaremos dinámica. Por lo que veamos que fuerzas hay presentes, primero en el eje Z

$$F_N = N\hat{k}$$
$$F_{mg} = -mg\hat{k}$$

Por ecuaciones de Newton

$$\sum F_z = m\ddot{z}$$
$$N - mg = 0$$
$$N = mg$$

Para el eje x tendremos que ir con mas cuidado, porque no conocemos el largo natural. Diremos que la posicion en la que parte será nuestro origen, de esta forma, si nombramos x, como el desplazamiento a la derecha del origen. tendremos

$$F_A = k_A(\delta_A - x)\hat{\imath}$$
$$F_B = k_A(\delta_B - x)\hat{\imath}$$

Para entender estas definiciones, sirve visualizar para donde apuntan las fuerzas cuando x es pequeño y cuando es muy grande, para el resorte A, tenemos que esta comprimido, por lo que la fuerza inicialmente apunta hacia la derecha, es decir, en $x = 0$ y x pequeño queremos que apunte en $\hat{\imath}$ puesto que el resorte seguira comprimido,ahora, cuando x es muuuy grande (es una referencia, no necesariamente tiene que pasar), queremos que la fuerza sea en el sentido de $-\hat{\imath}$ y vemos que se cumple. El razonamiento es análogo para B. $x = 0$ y x pequeño, queremos que apunte hacia la derecha porque esta estirado, y para x muy grande queremos que apunte hacia la izquierda.

Tambien tenemos otra fuerza invitada en nuestro problema, el roce

$$\begin{aligned} F_{roce} &= -N\mu\hat{\imath} \\ &= -mg\mu\hat{\imath} \end{aligned}$$

Hay que tener ojo con la dirección en la que apunta el roce. Atención en este punto, nos piden la velocidad máxima que alcanza, (ahora razonaremos con energía para fundamentar los pasos), La velocidad maxima se alcanza cuando la mayor cantidad de energía del sistema es energía cinética. Pero tenemos un problema con roce cinético, esto significa que cada vez que el sistema se desplaza pierde energía, de manera que la velocidad maxima ocurrira cuando los resortes le entreguen la maxima cantidad de energía que puedan, y haya perdido la menor cantidad de energía posible producto del roce. Es por esto que diremos que alcanza una velocidad máxima cuando el roce apunta hacia la izquierda, que viene a ser el primer tramo. De manera que la solución que encontraremos para el problema, solo sirve en el tramo en el que la particula parte desde el reposo en $x = 0$ y llega a un punto donde el resorte B se comprime lo maximo que permita la energia disponible. Para este tramo, el roce apunta hacia la izquiera y es por esto que lo definí así, de esta forma tendremos.

$$\begin{aligned} \sum m\ddot{x} &= \sum F_x \\ m\ddot{x} &= k_A(\delta_A - x) + k_B(\delta_B - x) - mg\mu \\ m\ddot{x} + x(k_A + k_B) &= k_A\delta_A + k_B\delta_B - mg\mu \\ \ddot{x} + x\frac{k_A + k_B}{m} &= \frac{k_A\delta_A + k_B\delta_B - mg\mu}{m} \end{aligned}$$

Tenemos una EDO no homogénea, llamaremos d a todo el lado derecho, y hacemos el cambio de variable. $x = u + \dfrac{md}{k_A + k_B} \implies \ddot{x} = \ddot{u}$ Pueden revisar que ese es el cambio de variables que apaña. Ahora tenemos nuestra bella EDO.

$$\ddot{u} + w_0^2 x = 0$$

Donde llamé a $\dfrac{k_A + k_B}{m}$ como w_0^2

Las soluciones de esta ecuación son:

$$\begin{aligned} u &= A\cos(w_0 t) + B\sin(w_0 t) \\ x(t) &= d + A\cos(w_0 t) + B\sin(w_0 t) \end{aligned}$$

Ahora imponemos condiciones Iniciales, primero por donde pusimos el origen $x(0) = 0$ y como nos dicen que parte desde el reposo $\dot{x}(0) = 0$, Así:

$$\begin{aligned} x(0) = 0 = A + d \\ A = -d \end{aligned}$$

Para la segunda condición:

$$\begin{aligned} \dot{x}(0) = 0 = w_0 B \\ B = 0 \end{aligned}$$

Asi tendremos nuestra ecuaciones de movimiento para el primer tramo como:

$$\begin{aligned} x(t) &= d(1 - \cos(w_0 t)) \\ \dot{x}(t) &= w_0 d \sin(w_0 t) \end{aligned}$$

Considereando que la velocidad maxima se va a alcanzar antes de que x alcance su maximo, podemos decir que la velocidad maxima será la amplitud de la velocidad. Así:

$$\begin{aligned} v_{max} &= w_0 d \\ &= \sqrt{\frac{k_A + k_B}{m}} \frac{k_A \delta_A + k_B \delta_B - mg\mu}{m} \end{aligned}$$

Eso, hay forma de resolverlo con trabajo y energia tambien pero este método me pareció mas intuitivo.