Pauta P2

Control 1

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Nicolás Guerra, Mauricio Rojas, Edgardo Rosas C.

Considere una placa de dimensiones L x $2L$ que está girando en el vacío (no hay gravedad) con velocidad angular constante ω_0 alrededor del eje z. Una partícula de masa m es lanzada con velocidad inicial V_0 relativa a la placa desde el punto medio del borde, en el lado más corto de la placa (ver figura adjunta).

a) Escriba la ecuación de movimiento de la partícula con respecto al sistema de referencia rotante (x,y,z) (1.5 puntos).

Como sabemos que el sistema (x, y, z) es rotante con velocidad angular ω_0, entonces inmediatamente sabemos que este será nuestro sistema de referencia no inercial S'.

Muchxs tuvieron el error de definirse otro sistema de referenci más en $x = L/2$, o sea que habrían 2 sistemas de referencia, pero ambos no inerciales. El problema de hacer esto es que este sistema no gira con el que nos dan en el enunciado, pero aún así consideraron que cambiaba su orientación.

Como la partícula no salta del plano ni se hunde en él, sabemos que $y = 0$, y que $\dot{y} = \ddot{y} = 0$. Entonces podemos expresar el vector posición, velocidad y aceleración según el sistema S' como:

$$\overrightarrow{r'} = x\hat{x} + z\hat{z}$$
$$\overrightarrow{V'} = \dot{x}\hat{x} + \dot{z}\hat{z}$$
$$\overrightarrow{a'} = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{z}\hat{z}$$

Al hacer un DCL de las fuerzas reales que actúan sobre la partícula, nos damos cuenta que la única que hay es la normal que ejerce el plano: $N\hat{y}$

Ahora nos preguntamos: ¿Cómo rota el sistema S'?

$$\overrightarrow{\Omega} = \omega_0\hat{z} => \dot{\overrightarrow{\Omega}} = 0$$

¿Y cómo se traslada? Ambos orígenes coinciden, entonces no se traslada.

$$\overrightarrow{R} = \dot{\overrightarrow{R}} = \ddot{\overrightarrow{R}} = 0$$

Luego calaculamos las fuerzas ficticias:

- $\overrightarrow{F}_{lineal} = -m \cdot \ddot{\overrightarrow{R}} = 0$
- $\overrightarrow{F}_{transversal} = -m \cdot \dot{\overrightarrow{\Omega}} \times \overrightarrow{r'} = 0$
- $\overrightarrow{F}_{centrífuga} = -m \cdot \overrightarrow{\Omega} \times (\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{r'}) = -m \cdot \omega_0 \hat{z} \times (\omega_0 \hat{z} \times (x\hat{x} + z\hat{z})) = -m \cdot \omega_0^2 \hat{z} \times (x\hat{y}) = m\omega_0^2 x\hat{x}$
- $\overrightarrow{F}_{Coriolis} = -2m\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{V'} - 2m\omega_0 \hat{z} \times \dot{x}\hat{x} + \dot{z}\hat{z} = -2m\omega_0 \dot{x}\hat{y}$

Entonces, las ecuaciones de movimiento quedan:

$\hat{x}$) $m\ddot{x} = m\omega_0^2 x$

$\hat{y}$) $N - 2m\omega_0 \dot{x} = 0$

$\hat{z}$) $m\ddot{z} = 0$

a_2) Determine la velocidad relativa de la partícula cuando llega al borde más largo de la placa (asumiendo que sale de ella por ese borde). (1.5 puntos)

Queremos encontrar la velocidad de la partícula $\overrightarrow{V'}$ relativa al plano cuando $x = L$.

De la ecuación de movimiento de z, obtenemos que $\dot{z}$ es constante e igual a V_0.

Para entontrar $\dot{x}$ nos fijamos en que en la ecuación de movimiento de $\hat{x}$ podemos usar el trucazo de mecánica para integrar:

$$m\ddot{x} = m\omega_0^2 x$$

$$\int_0^{\dot{x}} \dot{x} d\dot{x} = m\omega_0^2 \int_{\frac{L}{2}}^{x} ddx$$

Como la velocidad en x parte siendo nula, integramos desde 0. Para la integral de x el límite inferior es $L/2$ porque esa fue su posición inicial en el eje x.

$$=> \dot{x}^2 = \omega_0^2 (x^2 - \frac{L^2}{4})$$

Esta es una expresión general de $\dot{x}$. Para obtener la que corresponde al momento en que llega al borde del plano, evaluamos en $x = L$: $\dot{x}^2(x = L) = \omega_0^2(\frac{3L^2}{4})$

Algo equivalente a hacer esto sería integrar altiro desde $L/2$ hasta L.

Varixs se equivocaron en que consideraron el punto $z = 2L$ para esto, en vez de $x = L$. A otrxs les pasó que consideraron los límites incorrectos, por ejemplo de 0 a L. Varixs que lxs que definieron sus sistema en $x = L/2$ integraron desde $L/2$ hasta L, pero en ese caso debiera haber sido desde 0 hasta $L/2$.

Entonces la velocidad en ese punto queda:

$$\overrightarrow{V'} = \frac{\sqrt{3}L\omega_0}{2}\hat{x} + V_0\hat{z}$$

b) Determine la fuerza normal que ejerce la placa sobre la partícula justo en ese momento. (1.5 puntos)

De la ecuación de movimiento en $\hat{y}$ obtenemos que:

$$N = 2m\omega_0 \dot{x}$$

Entonces para encontrar la normal cuando $x = L$ hay que reemplazar $\dot{x}$ evaluado en ese punto:

$$N = 2m\omega_0 \cdot \frac{\sqrt{3}L\omega_0}{2}$$
$$=> \overrightarrow{N} = \sqrt{3}mL\omega_0^2 \hat{y}$$

c) Sabemos que el trabajo es igual a la diferencia de energía cinética: $W = \Delta K$ Y tenemos que:

- En $x = L/2$: $K_{inicial} = \frac{1}{2}mV_0^2$
- En $x = L$: $K_{final} = \frac{1}{2}m(V_0^2 + \frac{3m\omega_0^2 L^2}{4})$

Entonces sacar la diferencia, obtenemos el trabajo:

$$W = \frac{3m\omega_0^2 L^2}{8}$$

Eso es todo!

Ojalá les hayan servido los comentarios uwu. Si encuentran algún error o tienen alguna pregunta, por favor mándenme un correo.

Cuídense y ánimo con lo que queda del semestre! <3