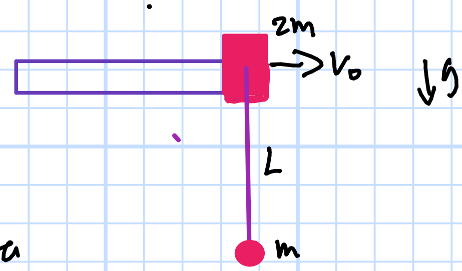
P2) Tenemos un anillo de masa $2m$ y una partícula de masa m. Unidas por una cuerda de largo L

Inicialmente el anillo tiene vel
$\vec{v} = V_0\hat{\imath}$



· Primero nos piden la trayectoria del CM.

Si vamos al CM. Tenemos que hara una caida libre, entonces por segunda ley de Newton

$$M\cdot\vec{a}_{cm} = \sum \vec{F}_{Ext} \Rightarrow 3m\cdot\ddot{x}_{cm} = 0 \quad \wedge \quad 3m\ddot{y} = -3mg$$

$$\dot{x} = cte \qquad\qquad \ddot{y} = -g$$

Ahora vemos que en "$\hat{x}$" se mueve a vel cte y en "y" hay caida libre.

Calculemos la velocidad inicial $\vec{V}_{cm}(0) = \frac{1}{M}\cdot\sum m_i\vec{V}_i(0)$

$$= \frac{1}{3m}\left(2m\cdot V_0\hat{x} + 0\right)$$

$$= \frac{2}{3}V_0\hat{x}$$

Entonces, para escribir itinerario necesitamos x_0 e y_0.

Inicialmente $x_{cm} = 0$ y para y_{cm} tenemos que calcular $\vec{R}_{cm}$

$$\vec{R}_{cm}(0) = \frac{1}{M}\cdot\sum m_i\vec{r}_i(0) = \frac{1}{3m}\cdot\left(2m\cdot\vec{0} + m\cdot(-mL\hat{y})\right) = -\frac{L}{3}\hat{y}$$

Con lo que podemos escribir el itinerario

$$x_{cm}(t) = 2\frac{V_0}{3}\cdot t \quad ; \quad y_{cm}(t) = -\frac{L}{3} - \frac{1}{2}gt^2$$

Para la Trayectoria tenemos que eliminar la dependencia temporal

$$\frac{3x}{V_0} = t \Rightarrow y = -\frac{L}{3} - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{3x}{V_0}\right)^2 \Rightarrow y = -\frac{L}{3} - \frac{9gx^2}{2V_0^2}$$

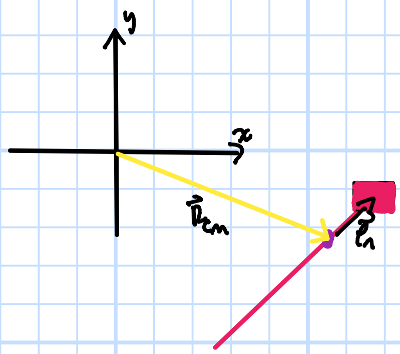
Análisis dimensional $y = [L]$; $\frac{L}{3} = [L]$; $\frac{9gx^2}{2V_0^2} = \left[\frac{\frac{L}{\cancel{T^2}} \cdot \cancel{L^2}}{\frac{\cancel{L^2}}{\cancel{T^2}}}\right] = [L]$

Todo tiene las dimensiones correctas c:

Con esto tenemos $\vec{R}_{cm}(t) = \left(\frac{2V_0}{3}t, -\frac{L}{3} - \frac{1}{2}gt^2\right)^T$ /Nos servirá después

b) Ahora queremos las componentes x e y del anillo.

Notamos que, despues de un tiempo t



Podemos escribir el vector que va al anillo como una suma de vectores

$\vec{r}_A(t) = \vec{R}_{cm}(t) + \vec{\ell}_1$ / Donde $\vec{\ell}_1 = \frac{L}{3}\cdot\left(\cos\theta(t)\hat{i} + \text{sen}(\theta(t))\hat{j}\right)$

Por lo que necesitamos encontrar $\theta(t)$, para lo que usaremos Torque

(Notamos que $\vec{\ell}_2 = -\frac{2L}{3}\left(\cos\theta(t)\hat{i} + \text{sen}\theta\hat{j}\right)$)

Calculamos la Inercia: $I = \sum m_i \rho_i^2 = 2m\cdot\left(\frac{L}{3}\right)^2 + m\cdot\left(\frac{2L}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}mL^2$

Ahora calculamos los torques

$$\tau_{ext} = \vec{\ell}_1 \times (-2mg\hat{j}) + \vec{\ell}_2 \times (-mg\hat{j}) = -\frac{2mgL}{3}\cos\theta + \frac{2mgL}{3}\cos\theta = 0$$

Cool, tenemos entonces

$$I\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = cte$$ y por lo tanto es igual a la velocidad angular inicial. Para encontrar $\dot{\phi}(0)$, diremos que es la vel del anillo relativa al CM, dividido por la distancia al CM

$$\dot{\theta}(0) = \left(\frac{2V_0}{3} - V_0\right) / \frac{L}{3} = -\frac{V_0}{L}$$

Donde el signo negativo es porque rota horario.

$$\theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}t = \frac{\pi}{2} - \frac{V_0}{L}t$$

Así podemos escribir

$$x_A(t) = x_{cm}(t) + \rho_{1x}(t) = \frac{V_0}{3}t + \frac{L}{3}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{V_0}{L}\cdot t\right)$$

$$y_A(t) = y_{cm}(t) + \rho_{1y}(t) = -\frac{L}{3} - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{L}{3}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{V_0}{L}\cdot t\right)$$

Notamos que cumple $x_A(0) = y_A(0) = 0$.

c) Ahora queremos encontrar el valor de la tensión, ya que tenemos las coordenadas del anillo, le haremos Newton, pero primero hagamos el DCL.

Calculamos $\ddot{x}_A$

$$\dot{x}_A(t) = \frac{V_0}{3} + \frac{V_0}{3}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{V_0}{L}t\right)$$

$$\ddot{x}_A(t) = -\frac{V_0^2}{3L}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{V_0}{L}\cdot t\right)$$

Escribimos Newton entonces: $+\frac{V_0^2}{3L}\cancel{\cos(\theta)} = +T\cancel{\cos\theta}$

$$\Rightarrow T = \frac{V_0^2}{3L}$$ //