Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI2001-6 - Mecánica

Pauta P1, Ejercicio 2

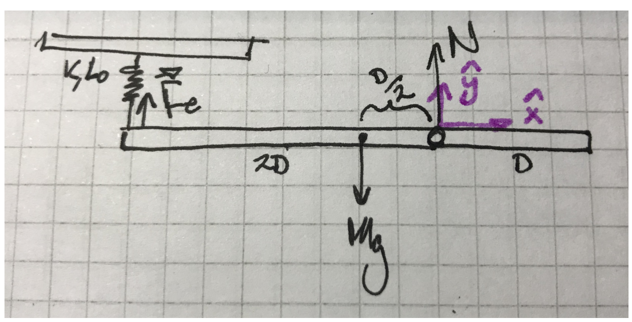
Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Nicolás Guerra, Mauricio Rojas, Edgardo Rosas C.

P2)

Considere una barra delgada de masa M y largo $3D$ que puede girar sin roce alrededor de un eje ubicado a una distancia D de su extremo derecho. La barra permanece en reposo en posición horizontal sujeta por un resorte de largo L_0 y constante elástica k.

a) Determine la deformación del resorte y la fuerza que el eje ejerce sobre la barra. (1 punto)
SOLUCIÓN:

Lo primero que hacemos es setear un sistema de referencia. Es intuitivo poner el origen donde está el eje de giro, con un sistema de coordenadas cartesianas.



Para encontrar la deformación del resorte, expresamos la suma de torques con respecto al punto O donde está el pivote, y como el sistema no está rotando, la igualamos a 0.
Hay 2 fuerzas que ejercen torque: la fuerza elástica $\overrightarrow{F_e} = k\delta\hat{y}$ (donde δ es la deformación del resorte) en $2D(-\hat{x})$ y la fuerza peso en $\frac{D}{2}(-\hat{x})$:

$$\sum \overrightarrow{\tau_0} = 0$$

$$\sum \overrightarrow{\tau_0} = 2D(-\hat{x}) \times k\delta\hat{y} + \frac{D}{2}(-\hat{x}) \times Mg(-\hat{y}) = 0$$

De aquí despejamos δ:

$$2Dk\delta = \frac{D}{2}Mg$$

$$=> \boxed{\delta = \frac{Mg}{4k}}$$

Ahora nos falta encontrar la normal.
Como sabemos que la barra no está rotando ni se está desplazando, sabemos que su suma de fuerzas es igual a 0. Todas las fuerzas están en $\hat{y}$, entonces tenemos que:

$$-Mg + k\delta + N = 0$$

$$=> \boxed{N = \frac{3Mg}{4}}$$

b) Determine el periodo de pequeñas oscilaciones si el extremo izquierdo de la barra se perturba ligeramente en dirección vertical. (2 puntos)
SOLUCIÓN:

Ahora que la barra oscila, tendremos un ángulo con respecto a la horizontal θ. Expresaremos la sumatoria de torques considerando este ángulo, para luego aproximar e intentar llegar a la expresión del oscilador armónico simple, de donde es directo conseguir la frecuencia de pequeñas oscilaciones.

$$I_0\ddot{\theta} = \sum \overrightarrow{\tau_0}$$

Primero encontremos el momento de inercia con respecto al pivote I_0.
Sabemos que el momento de inercia de una barra con respecto a su centro de masa es $I_{CM} = \frac{Md^2}{12}$, donde d es su largo.
Tenemos que:

$$I_{CM} = \frac{M(3D)^2}{12} = \frac{3MD^2}{4}$$

Y para encontrar el momento de inercia con respecto al pivote, ocupamos Steiner:

$$I_0 = I_{CM} + MR^2$$

donde R es la distancia del centro de masa al punto 0.

$$I_0 = \frac{3MD^2}{4} + M(\frac{D}{2})^2 = MD^2$$

Ahora, tenemos que: $I_0\ddot{\theta} = \sum \overrightarrow{\tau_0}$, y considerando que la fuerza elástica es igual a: $F_e = k(\delta + 2D\sin\theta)$, nos queda que:

$$MD^2\ddot{\theta} = -2D(\delta + 2D\sin\theta)\cos\theta + \frac{D}{2}Mg\cos\theta$$

En este punto ya podemos aproximar a pequeñas oscilaciones, es decir, imponer que: $\theta \ll 1$. Esto implica que $\cos\theta \approx 1$ y que $\sin\theta \approx \theta$. Con esto, la ecuación queda:

$$MD^2\ddot{\theta} = -2D(\delta + 2D\theta) + \frac{D}{2}Mg$$

Y reordenando, nos damos cuenta que ya llegamos a la ecuación de movimiento del oscilador armónico simple.

$$\ddot{\theta} + \frac{4k}{M}\theta = 0$$

Entonces, la frecuencia de pequeñas oscilaciones es la constante que acompaña a la variable θ:

$$\omega = \sqrt{\frac{4k}{M}}$$

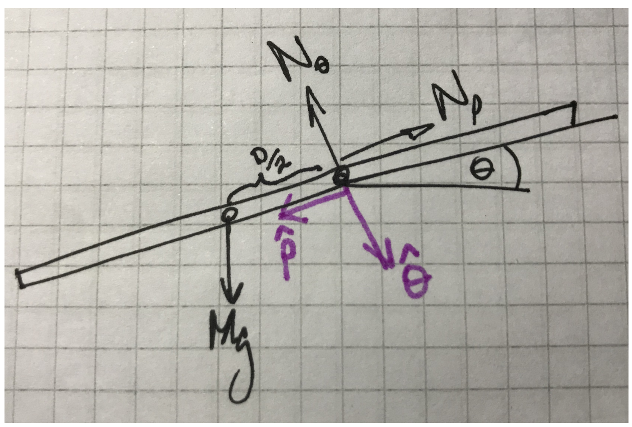
Y como el periodo es igual a: $T = \frac{2\pi}{\omega}$, obtenemos que:

$$\boxed{T = \pi\sqrt{\frac{M}{k}}}$$

En un cierto instante la barra se desprende del resorte y cae, rotando alrededor del eje.

c) Determine el cambio que se produce en la fuerza que el eje ejerce sobre la barra al momento que ésta se desprende del resorte. (1 punto)
SOLUCIÓN:

Ahora resulta más conveniente tener un sistema de coordenadas polares, como en la figura.



La ecuación donde está la normal es la de movimiento. La expresamos en coordenadas polares:

$\hat{\rho}$) $-M\frac{D}{2}\dot{\theta}^2 = Mg\sin\theta - N_{hro}$

$\hat{\theta}$) $M\frac{D}{2}\ddot{\theta} = Mg\cos\theta - N_\theta$

Pero vemos que antes de poder despejar la normal, necesitamos encontrar una expresión para $\ddot{\theta}$ y $\dot{\theta}^2$. Estas las podemos conseguir de la sumatoria de torques $I_0\ddot{\theta} = \sum\overrightarrow{\tau_0}$. Como ya no hay fuerza elástica, la única que ejerce torque es la fuerza peso.

$$MD^2\ddot{\theta} = \frac{D}{2}Mg\cos\theta$$

Tenemos que:

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{2D}\cos\theta$$

Integramos usando el trucazo de mecánica:

$$\int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta} d\dot{\theta} = \frac{g}{2D} \int_0^{\theta} \cos\theta d\theta$$

$$=> \dot{\theta}^2 = \frac{g}{D} \sin\theta$$

Usando estas expresiones en las ecuaciones de movimiento, despejamos las expresiones de la fuerza normal:

$\hat{\rho}$) $N_\rho = \frac{3}{2} Mg \sin\theta$

$\hat{\theta}$) $N_\theta = \frac{3}{4} Mg \cos\theta$

Finalmente, evaluamos la normal en el punto de equilobrio: $\theta = 0$

$\hat{\rho}$) $N_\rho(0) = 0$

$\hat{\theta}$) $N_\theta(0) = \frac{3}{4} Mg$

Entonces la magnitud de la normal es: $N = \frac{3}{4} Mg$.

Antes de que se cortara tenía el mismo valor, entonces concluimos que esta fuerza no cambió.

d) Calcule la rapidez del extremo derecho de la barra cuando en la caída la barra forme un ángulo de $\pi/4$. (2 puntos) SOLUCIÓN:

La rapidez en coordenadas polares es: $\overrightarrow{V} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta}$
Sabemos que $\rho =$ D, y que $\dot{\rho} = 0$, por lo que solo nos falta encontrar $\dot{\theta}$.

Toda la barra rota con la misma velocidad angular. Entonces la expresión que encontramos en la parte c), a pesar de haber salido de la sumatoria de torques del centro de masa, es válida para el extremo derecho de la barra también: $\dot{\theta}^2 = \frac{g}{D} \sin\theta$

Evaluamos esta expresión en $\theta = \frac{\pi}{4}$:

$$\dot{\theta}(\theta = \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{g}{D}$$

Entonces la rapidez queda:

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{\sqrt{2}gD}{2}}}$$

Si encuentran algún error o algo no quedó claro, envíenme un correo c:

Ojalá les haya servido!

Ánimo con lo que queda del semestre <3

Nico