Pauta P2

Examen de Segunda Instancia

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Nicolás Guerra, Mauricio Rojas, Edgardo Rosas C.

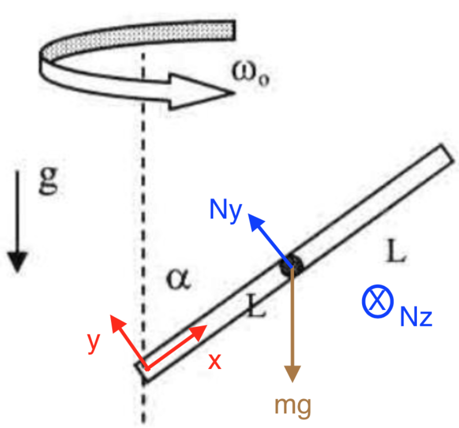
P2)

Considere un tubo de largo $2L$ que gira con velocidad angular ω_0 respecto de un eje vertical que pasa por su extremo inferior, con el tubo formando un ángulo $\theta = \frac{\pi}{3}$ con la vertical. En su interior se encuentra una partícula de masa m que se puede mover con roce despreciable por el interior del tubo. En un cierto instante la partícula se libera desde el reposo (relativo al tubo) estando en el punto medio del tubo (ver figura)

a) ¿Cuál debe ser la velocidad angular de rotación ω_0 para que la partícula se mantenga en esa posición al ser liberada ?

SOLUCIÓN:

Afrontamos le problema con un sistema de referencia no inercial (ver figura). El sistema en rojo es S'.



Primero que todo, expresamos el vector $\hat{z}$ del sistema inercial según los vectores unitarios de S'.

$$\hat{z} = \cos\theta \hat{x'} + \sin\theta \hat{y'} \tag{1}$$

Luego, expresamos el vector posición, velocidad y aceleración según S'.

$$\overrightarrow{r'} = x\hat{x'}$$
$$\overrightarrow{V'} = \dot{x'}\hat{x'}$$
$$\overrightarrow{a'} = \ddot{x'}\hat{x'}$$

Ahora, hacemos el DCL de fuerzas reales y escribimos las ecuaciones de Newton:

$\hat{x'}$ $m\ddot{x'} = -mg\cos\theta$

$\hat{y'}$ $0 = N_y - mg\sin\theta$

$\hat{z'}$ $0 = -N_z$

Ahora que tenemos todo lo que respecta a S' listo, nos preguntamos:

- ¿Cómo rota S' con respecto a S?
  Con una velocidad angular: $\overrightarrow{\omega} = \omega_0\hat{z}$
  Y una aceleración angular: $\dot{\overrightarrow{\omega}} = 0$
- ¿Cómo se traslada?
  No se traslada, porque tienen el mismo origen: $\overrightarrow{R} = \dot{\overrightarrow{R}} = \ddot{\overrightarrow{R}} = 0$

Ahora, calculamos las fuerzas ficticias:

- $\overrightarrow{F}_{lineal} = -m\ddot{\overrightarrow{R}} = 0$
- $\overrightarrow{F}_{transversal} = -m\dot{\overrightarrow{\omega}} \times \overrightarrow{r'} = 0$
- $\overrightarrow{F}_{centrífuga} = -m\overrightarrow{\omega} \times (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r'}) = -m\omega_0^2 x\sin\theta(\cos\theta\hat{y'} - \sin\theta\hat{x'})$
- $\overrightarrow{F}_{Coriolis} = -2m\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{V'} = 2m\omega_0\dot{x}\sin\theta\hat{z'}$

Con esto podemos expresar las ecuaciones de movimiento según el SRNI:

$\hat{x'}$ $m\ddot{x'} = m\omega_0^2 x'\sin^2\theta - mg\cos\theta$

$\hat{y'}$ $0 = N_y - mg\sin\theta - m\omega_0^2 x\sin\theta\cos\theta$

$\hat{z'}$ $0 = 2m\dot{x'}\omega_0\sin\theta - N_z$

Evaluamos la ecuación de $\hat{x'}$ en $x = L$, que es la condición inicial. Como $\theta = \frac{\pi}{3}$, usamos que $\cos\theta = \frac{1}{2}$ y que $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$m\omega_0^2 L\frac{3}{4} = \frac{mg}{2}$$

De aquí obtenemos que:

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{3L}}}$$

b) Suponga que se cumple la siguiente relación entre la velocidad angular ω_0, la distancia L y la gravedad g: $\omega_0^2 L = g$. En ese caso calcule la velocidad absoluta de la partícula al momento de salir del tubo.

SOLUCIÓN:

La velocidad absoluta es la velocidad según el sistema de referencia inercial. Ocupamos la siguiente igualdad: $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r'}} + \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{r'}$

Sabemos que el segundo término es 0, y el tercero ya fue calculado cuando sacamos las fuerzas ficticias. Nos falta calcular el primer término.

Aplicamos el trucazo de mecánica a la ecuación de movimiento de $\hat{x'}$: $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dx} d\dot{x}$

$$\ddot{x'} = \omega_0^2 x' \sin^2\theta - g\cos\theta$$

$$\int_0^{\dot{x'}} d\dot{x} = \int_L^{2L} \frac{g}{L} \sin^2\theta \cdot x' - g\cos\theta$$

De aquí despejamos $\dot{x'}$:

$$\dot{x'} = \sqrt{\frac{5}{4} gL}$$

Entonces, la velocidad absoluta queda:

$$\boxed{\dot{\vec{r}} = \sqrt{\frac{5}{4} gL}\hat{x'} - \sqrt{3} L\omega_0 \hat{z'}}$$

c) ¿Cuál es la fuerza que la pared del tubo ejerce sobre la partícula justo antes de salir del tubo?

SOLUCIÓN:

La normal tiene 2 componentes: N_y y N_z.

Desde la ecuación en $\hat{y'}$, evaluamos en $x = 2L$ y despejamos:

$$N_y = mg\frac{\sqrt{3}}{2} + m\frac{g}{L} 2L \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2}$$

$$\boxed{N_y = \sqrt{3} mg}$$

La componente en $\hat{z'}$ la calculamos de la misma forma, desde la ecuación de movimiento correspondiente:

$$0 = 2m\dot{x'}\omega_0 \sin\theta - N_z$$

$$N_z = 2m\sqrt{\frac{g}{L}} \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{5}{4} gL}$$

$$\boxed{N_z = \frac{\sqrt{15}}{2} mg}$$

Finalmente, el módulo de la normal es: $N = \sqrt{N_y^2 + N_z^2}$

$$\boxed{N = \frac{3\sqrt{2}}{2} mg}$$