Introducción al álgebra MA1101

Auxiliar 11: Homomorfismos y Grupos

P1. Considere la estructura algebraica $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$.

a) Construya la tabla para la operación $\cdot_5$ en $\mathbb{Z}_5$.

b) ¿Es $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$ un grupo?

c) Muestre que $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}, \cdot_5)$ es un grupo abeliano.

d) ¿Es $(\mathbb{Z}_4, \setminus\{[0]\}, \cdot_4))$ un grupo?

P2. a) Sea $\mathcal{G} = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$, y sea $\star$ la ley de composición interna definida por

$$a \star b = \frac{a+b}{1+ab} \qquad \forall a, b \in \mathcal{G}.$$

Demuestre que $(\mathcal{G}, \star)$ es un grupo abeliano.

b) Se define en $\mathbb{R}$ la ley de composición interna $*$ por:

$$x * y = \sqrt[5]{x^5 + y^5} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Muestre que la función $f(x) = x^5$ es un isomorfismo de $(\mathbb{R}, *)$ en $(\mathbb{R}, +)$ y que también es un isomorfismo de $(\mathbb{R}, \cdot)$ en $(\mathbb{R}, \cdot)$, donde las operaciones $+$ y $\cdot$ denotan la suma y producto usuales en $\mathbb{R}$.

P3. Sea $(G, *)$ un grupo.

a) Demuestre que $(G, *)$ es un grupo abeliano si y sólo si $\varphi : G \to G$ dada por $\varphi(g) = g*g$ es un homomorfismo.

b) Demuestre que $(G, *)$ es un grupo abeliano si y sólo si $\varphi : G \to G$ dada por $\varphi(g) = g^{-1}$ es un automorfismo.

P4. a) Demuestre que para cada $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, la función $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dada por $f(q) = kq$ es un automorfismo.

b) Demuestre que $(\mathbb{Z}, +)$ y $(\mathbb{Q}, +)$ no son isomorfos.

c) Encuentre un ejemplo de grupos G, H y $\varphi : H \to G$ homomorfismo, de modo que G es abeliano y H no lo es.