MA1101-6 Introducción al Álgebra 2020, Otoño
Profesor: Paulina Cecchi B.
Auxiliar: Patricio Yáñez Alarcón
Correo: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 01: Lógica Proposicional

17 de Abril

Resumen

- **[Tautologías básicas]**: Las siguientes proposiciones son tautologías:
  a) ***Dominancia***: $p \vee V \Leftrightarrow V, \quad p \wedge F \Leftrightarrow F$
  b) ***Identidad***: $p \wedge V \Leftrightarrow p, \quad p \vee F \Leftrightarrow p$
  c) ***Idempotencia***: $p \wedge p \Leftrightarrow p, \quad p \vee p \Leftrightarrow p$
  d) ***Doble negación***: $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
  e) ***Tercio excluso***: $p \vee \overline{p} \Leftrightarrow V$
  f) ***Consistencia***: $p \wedge \overline{p} \Leftrightarrow F$
  g) ***Absorción***: $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p, \quad p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
  h) ***Relajación***: $p \wedge q \Rightarrow p, \quad p \Rightarrow p \vee q$
  i) ***Caracterización de la implicancia***: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \overline{p} \vee q$
- **[Álgebra Booleana]**: Son tautologías:
  - ***Leyes de De Morgan:*** $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}, \quad \overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$
  - ***Conmutatividad:***
    Del $\vee : p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
    Del $\wedge : p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
  - ***Asociadtividad***
    Del $\vee : p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
    Del $\wedge : p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
  - ***Distributividad***
    Del $\wedge$ con respecto al $\vee$: $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
    Del $\vee$ con respecto al $\wedge$: $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- **[Tautologías relevantes]**: Otras tautologías a tener en cuenta son:
  a) ***Doble implicancia***: $(p \Leftrightarrow q) \iff (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
  b) ***Modus Ponens***: $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
  c) Transitividad: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
  d) ***Contrarecíproca***: $(p \Rightarrow q) \iff (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$
  e) ***Contradicción***:
     - Forma 1: $q \iff (\overline{q} \implies F)$
     - Forma 2: $[(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow V] \Leftrightarrow [p \wedge \overline{q}] \Rightarrow F$
- **[Negación de cuantificadores]**:
  a) $\overline{(\exists x)p(x)} \Leftrightarrow (\forall x)\overline{p(x)}$
  b) $\overline{(\forall x)p(x)} \Leftrightarrow (\exists x)\overline{p(x)}$
- **[Existencia y unicidad]**: Se define el cuantificador de existencia y unicidad $(\exists!)$ como sigue:

$$(\exists! x)p(x) \Leftrightarrow [(\exists x)p(x)] \wedge [(\forall x)(\forall y)\{(p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow (x = y)\}]$$

P1. MÓDULO COMÚN:

Sean p, q y r proposiciones. Demuestre, sin usar tablas de verdad, que las siguientes proposiciones son tautologías:

1. $(p \wedge q \Rightarrow r) \iff (p \wedge \overline{r} \Rightarrow \overline{q})$
2. $[(p \Rightarrow \overline{q}) \wedge (\overline{r} \vee q) \wedge r] \Rightarrow \overline{p}$.
3. $[(p \Rightarrow q) \wedge (\overline{s} \Rightarrow \overline{r})] \Rightarrow [\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)]$

   a) Intuición: Ver que tipo de método de demostración es óptimo.

b) Teoría: Tener claros conceptos conceptos como valores de verdad, y más que aprendidas las tautologías básicas para poder usarlas.

c) Matraca: Decidir un método de demostración y ahora empezar a desarrollo o sacar conclusiones a partir de esto, si es el simbólico recordar justificar los pasos de buena manera.

P2. MÓDULO COMÚN:

Sean p y q proposiciones. Se define la proposición *ni* p *ni* q, que denotaremos por $p \downarrow q$, por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Cuadro 1: valores de $p \downarrow q$.

1. Muestre que $\overline{p} \iff p \downarrow p$ y que $p \vee q \iff \overline{(p \downarrow q)}$.

2. Exprese las proposiciones $(p \Rightarrow q)$ y $p \wedge q$ utilizando únicamente $\sim$ y $\downarrow$.

a) Intuición: Me están definiendo un nuevo conectivo lógico u operador, con esto debo ser consiente que es solo es una forma de llamar, ahora comprender como funciona es primordial y a trabajar.

b) Teoría: Dada la base teórica anterior que debo manejar funcionará el nuevo conectivo lógico, por lo que si manejo bien lo anterior este no me será problema.

c) Matraca: El trabajar con tablas de verdad para la primera parte, luego ver como editar lo que me muestran para poder trabajar con algo conocido.

P3. MÓDULO COMÚN:

Considere las proposiciones $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ que tienen la propiedad que la proposición $[\overline{(p_1 \iff p_2)} \Rightarrow (p_4 \Rightarrow p_3)]$ es falsa. Determinar el valor de verdad de

$$\overline{[(p_6 \vee p_5) \wedge (p_1 \wedge p_2)]} \iff (p_3 \Rightarrow p_4).$$

a) Intuición: Me dan una hipótesis, de donde debo extraer la mayor cantidad de información posible.

b) Teoría: Manejar muy bien las propiedades de tautologías y proposiciones, para poder concluir.

c) Matraca: Desarrollar algo la expresión y evitar la gran matraca para poder concluir con la información anterior.

P4. PROPIO SECCIÓN

Considere las siguientes proposiciones:

$$p: \quad (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x \leq y)$$

$$q: \quad (\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(x \leq y)$$

Indique el valor de verdad de cada una de ellas justificando su respuesta. Finalmente escriba sus negaciones.

a) Intuición:Tendré que poder diferencias casos que todos me cumplen una propiedad con los que alguno cumple toda propiedad

b) Teoría: Manejar bien las proposiciones lógicas para poder pasar teóricamente, al segundo nivel, que en este caso serían los cuantificadores pueden complementar el lenguaje matemático.
Negación de proposiciones compuestas.

c) Matraca: Aterrizar los casos a conjuntos que manejen, y así poder concluir que caso es cual, en caso de ser una falsa, mostrar contraejemplo.
Para la negación no negar mecánicamente, si no entenderlo.

Propuestos

P5. PROPIO DE SECCIÓN

Demuestre que las proposiciones son tautología:

a) $(\exists y)[p(y) \Rightarrow (\forall x)p(x)]$

b) $(\forall x)(\exists y)(p(x) \Rightarrow p(y))$

c) $(\exists y)(\forall x)(p(x) \Rightarrow p(y))$

P6. MÓDULO COMÚN:

Sean p, q, r, s proposiciones. Se sabe que s es verdadera y que

$$s \Rightarrow ((\overline{p} \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r))$$

es verdadera. Probar que $q \vee r$ es verdadera.

P7. MÓDULO COMÚN-C1.2012:

Sean p, q y r tres proposiciones.

a) Demuestre que

$$[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \not\Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow r].$$

b) Demuestre, sin usar tablas de verdad, que

$$[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r].$$

"La ciencia ha eliminado las distancias, pregonaba Melquíades. Dentro de poco, el hombre podrá ver lo que ocurre en cualquier lugar de la tierra, sin moverse de su casa".
Gabriel García Márquez-100 años de soledad