Aux 6

P1) Considere $U_0 = 2$, $u_1 = 3$ — Recurrencia

$U_{n+1} = (3 \quad U_n) - (2 U_{n-1})$, $\forall n \geq 1$

$U_n = 2^n + 1$, $\forall n \geq 1$ pdq

Quiero probar por inducción

CB: $U_2 = 3U_1 - 2U_0$

$\begin{matrix} 1+1 \\ n+1 \\ n=1 \end{matrix} \quad = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5 = 2^2 + 1$

HI $U_K = 2^K + 1$, $\forall j \leq K$, $j, K \in \mathbb{N}$

PI
$$\begin{aligned}
U_{K+1} &= 3U_K - 2U_{K-1} \quad \text{HI } (\Rightarrow) \\
&= 3 \cdot 2^K + 1 - 2U_{K-1} \\
&= 3 \cdot (2^K + 1) - 2(2^{K-1} + 1) \\
&= 3 \cdot 2^K + 3 - 2^K - 2 \\
&= 3 2^K - 2^K + 1 \\
&= 2 \cdot 2^K + 1 \\
&= 2^{K+1} + 1
\end{aligned}$$

$\therefore$ $P(K) \Rightarrow P(K+1)$ cumple!

EXTRA

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right) \text{———} \left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$ ACOMODAR!

CB $n=2$ $\left(1-\frac{1}{2^2}\right) = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4} \overset{?}{=} \frac{2+1}{2 \cdot 2}$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \text{ //}$$

HI Para algún $K \in \mathbb{N}$

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{K^2}\right) = \frac{K+1}{2K}$$

pdq $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{K^2}\right)\left(1-\frac{1}{(K+1)^2}\right)$

por HI $\frac{K+1}{2K}\left(1-\frac{1}{(K+1)^2}\right)$

$$= \frac{\cancel{K+1}}{2K}\left(\frac{K^2+2K}{(K+1)^{\cancel{2}}}\right)$$

$$= \frac{K+2}{2(K+1)}$$

lo que queríamos era $p(K+1) = \frac{K+1+1}{2(K+1)} = \frac{K+2}{2(K+2)}$

P2) $f: E \to F$ y $g: F \to G$

a) $A \subseteq G$

$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ pdq

Arbitrario $\Rightarrow$

En efecto sea $x \in (g \circ f)^{-1}(A)$

imagen

$\exists x \in A$ tq $f(x) = y$

preimagen

$f^{-1}(B') = \{x \in A, f(x) \in B'\}$ $B' \subseteq B'$

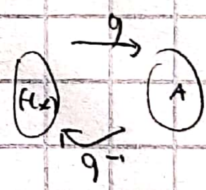
Retomando

$(g\circ f)^{-1}A \Leftrightarrow g\circ f(x) \in A$ /def. preimagen

$\Leftrightarrow g(f(x)) \in A$ / composición

$\Leftrightarrow f(x) \in g^{-1}(A)$ / preimagen

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(g^{-1}(A))$



Entonces podemos traducir

$x \in (g\circ f)^{-1}(A) \Rightarrow x \in f^{-1}(g^{-1}(A)) \wedge x \in f^{-1}(g^{-1}(A)) \Rightarrow x \in (g\circ f)^{-1}(A)$

$(g\circ f)^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(g^{-1}(A)) \wedge f^{-1}(g^{-1}(A)) \subseteq (g\circ f)^{-1}(A)$

$\Rightarrow (g\circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$

Como x era arbitrario lo probé para todos

P2) b) $B \subseteq F$

pdq $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$ → conjunto de todas las imágenes

Sea $y \in f(f^{-1}(B))$

→ imagen $\exists x \in A,\ f(x) = y$

→ preimagen $f^{-1}(B') = \{x \in A \ f(x) \in B'\}$

$\Leftrightarrow \exists\, x \in f^{-1}(B)$, tq $f(x) = y$ / def. imagen

$\Leftrightarrow f(x) \in B$ / def. preimagen

$\Leftrightarrow y \in B$

$\Leftrightarrow y \in B \wedge y \in f(E)$

$\Leftrightarrow y \in (B \cap f(E))$

$\Leftrightarrow f(f^{-1}(B)) \subseteq B \cap f(E) \wedge f(f^{-1}(B)) \supseteq B \cap f(E)$

$\Leftrightarrow f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$

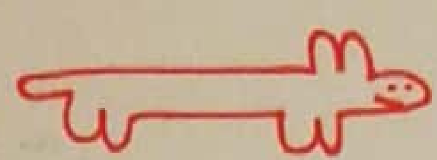
Pauta auxiliar 6

P2]

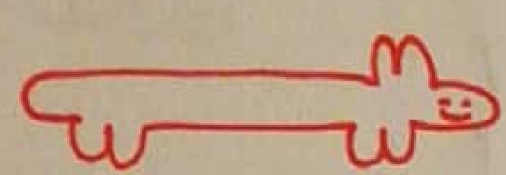
$$F : P(E) \times P(E) \longrightarrow P(E)$$

tal que: $F((X,Y)) = X \setminus Y$

a) P.D.Q. $F^{-1}(\{E,\phi\}) = \underbrace{\{(E,\phi)\} \cup \{(X,Y) \in P(E)\times P(E) \mid X \subseteq Y\}}$

Llamemoslo 

En efecto: Veamoslo por doble inclusión:

$\supseteq$] Sea $(X,Y) \in$ 

Hay dos opciones:

1) $(X,Y) \in \{(E,\phi)\}$

Esto es: $(X,Y) = (E,\phi)$

Luego: $F(X,Y) = F(E,\phi) = E \setminus \phi = E$

Luego $(X,Y) \in F^{-1}(\{E\}) \subseteq F^{-1}(\{E,\phi\})$

Usando que si $A \subseteq B$ entonces: $F^{-1}(A) \subseteq F^{-1}(B)$

$\therefore (X,Y) \in F^{-1}(\{E,\phi\})$

2) $(X,Y) \in \{(X,Y) \in P(E)\times P(E) \mid X \subseteq Y\}$

O sea: $X \subseteq Y$. Luego $F((X,Y)) = X \setminus Y$

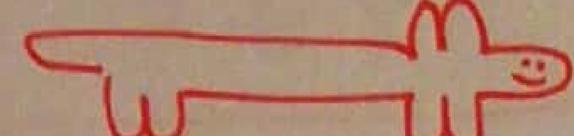
$= X \cap Y^c$ | Def. de diferencia

Como $X \subseteq Y \iff X \cap Y^c = \phi$ | Recordar propiedad mística (P1 auxiliar Conjuntos I)

Luego $F(X,Y)=\phi \quad \Rightarrow \quad (X,Y)\in F^{-1}(\phi) \subseteq F^{-1}(\{E,\phi\})$

$\therefore \quad (X,Y)\in F^{-1}(\{E,\phi\})$

Como en todos los casos $(X,Y)\in F^{-1}(\{E,\phi\})$

$\Rightarrow$  $\subseteq F^{-1}(\{\phi,E\})$

$\subseteq$] Sea $(X,Y)\in F^{-1}(\{\phi,E\})$ arbitrario

$\Rightarrow \quad F(X,Y)\in\{\phi,E\}$

Hay dos casos:

1) $F(X,Y)=E$.

Esto es: $\quad X\setminus Y = E$

$\Leftrightarrow \quad X\cap Y^c = E$

Como: $\quad X\subseteq E$

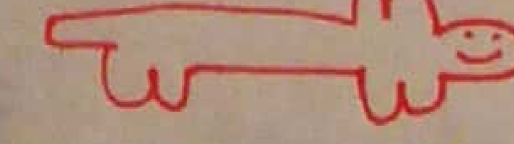
$Y\subseteq E$

y además: $\quad E = X\cap Y^c \subseteq X$

$E = X\cap Y^c \subseteq Y^c$

Se concluye que $\quad E=X \quad \wedge \quad E=Y^c$

$\Leftrightarrow \quad X=E \quad \wedge \quad Y=E^c=\phi$

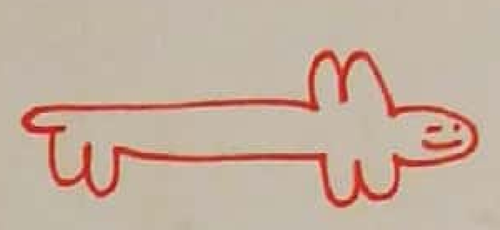
$\therefore \quad (X,Y)\in\{(E,\phi)\}\subseteq$ 

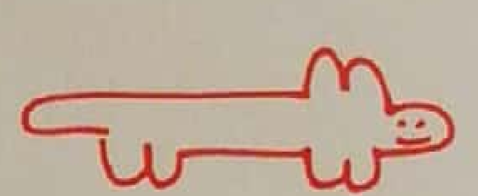
2) $F(X,Y) = \emptyset$

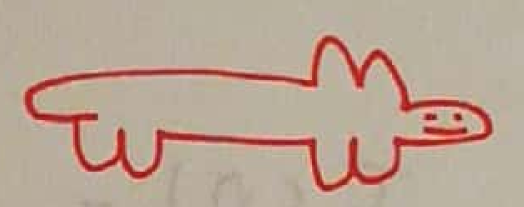
Esto es: $X \setminus Y = \emptyset$ | Def. de F

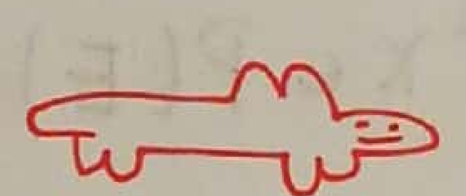
$\iff X \cap Y^c = \emptyset$ | Def de diferencia

$\iff X \subseteq Y$ | Propiedad mística P1 aux conjuntos

$\therefore (X,Y) \in \{(X,Y) \in P(E) \times P(E) \mid X \subseteq Y\} \subseteq$ 

$\therefore$ Como en todos los casos $(X,Y) \in$ 

Se tiene que $F^{-1}(\{E,\emptyset\}) \subseteq$ 

$\therefore$ Se concluye que $F^{-1}(\{E,\emptyset\}) =$ 

b) $D = \{(X,X) \mid X \in P(E)\}$

Determinar $F(D)$

Sea $Z \in F(D)$

$\iff \exists (X,Y) \in D, \ Z = F(X,Y)$

$\iff Z = F(X,X)$ | Por def de D, $Y = X$

$\iff Z = X \setminus X = \emptyset$

$\therefore$ Si $Z \in F(D) \iff Z \in \{\emptyset\}$, esto es $F(D) = \{\emptyset\}$.

c) Veamos que F es sobreyectiva pero no inyectiva:

1) F sobreyectiva.

En efecto: Lo vimos en tarea (ejercicio TP A #1) pero:

Sea $Z \in P(E)$. Si tomamos $(X,Y) = (Z, \phi)$ tenemos

que $Z = F(X,Y) \left(= F(Z,\phi) = Z \setminus \phi \right)$

$\therefore$ F es sobreyectiva.

2) F no es inyectiva.

En efecto: por parte b) $F(D) = \{\phi\}$.

Luego $\forall X \in P(E)$ $F(X,X) = \phi$

Si tomamos X_1, X_2 distintos:

$F(X_1, X_1) = \phi = F(X_2, X_2)$

pero $X_1 \neq X_2$ $\therefore$ F no es inyectiva.