MA1101-6 Introducción al Álgebra 2020, Otoño
Profesora: Paulina Cecchi B.
Auxiliar: Patricio Yáñez Alarcón
Correo: pyanez@dim.uchile.cl

Actualmente Auxiliar de Introducción al Álgebra MA1101-6
Material Público se actualiza semana a semana. Material Docente
Canal con material cada semana
Canal de YouTube: Patricio Yáñez Matemáticas Universitarias

Resumen Introducción al Álgebra C2 Formativo 2020

Les va a ir bacan

1.- Relaciones

- **[Relación]**: Es una tripleta $(A, B, \mathcal{R})$ que cumple $\mathcal{R} \subset A \times B$. Si $(a, b) \in \mathcal{R}$ denotamos $a\mathcal{R}b$
- **[Propiedades de relaciones]**: Una relación R en A es:
  - **Refleja**: si $\forall x \in A$, $x\mathcal{R}x$
  - **Simétrica**: si $\forall x, y \in A$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$
  - **Antisimétrica**: si $\forall x, y \in A$, $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow y = x$
  - **Transitiva**: $\forall x, y, z \in A$, $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$
- **[Ejemplo de relación]**: En $\mathbb{Z}$ se define la relación divisibilidad, que se anota $a|b$ si existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $b = qa$.
- **[Relación de orden]**: $\mathcal{R}$ es una relación de orden en A, si es una relación **refleja**, **antisimétrica** y **transitiva**.
  Observación: $\mathcal{R}$ es un orden total si para todo $x, y \in A$, $x e y$ son comparables, es decir $x\mathcal{R}y$ o $y\mathcal{R}x$.
- **[Relación de equivalencia]**:$\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en A, si es una relación **refleja**, **simétrica** y **transitiva**.
- **[Clase de equivalencia]**: Dado un elemento $a \in A$ se define:

$$[a]_{\mathcal{R}} = \{x \in A \mid a\mathcal{R}x\}$$

- **[Conjunto cuociente]**: Al conjunto de las clases de equivalencia de una relación $\mathcal{R}$ se le llama conjunto cuociente, definido por:

$$A/\mathcal{R} := \{[a]_{\mathcal{R}} \mid a \in A\}$$

- **[Equivalencias relevantes]**: Sea $\mathcal{R}$ relación de equivalencia en A y $x, y \in A$. Son equivalentes:
  I) $[x]_{\mathcal{R}} \subseteq [y]_{\mathcal{R}}$
  II) $[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$
  III) $x\mathcal{R}y$
  IV) $[x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$

  Obs.: Con esto se deduce que $A/\mathcal{R}$ es partición de A.
- **[Congruencia modular]**: Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define $\mathbb{Z}$ la relación $\equiv_n$ por:

$$a \equiv_n b \iff n|(a-b)$$

- **[Teorema de División Entera]**: Sean $a, m \in \mathbb{Z}$ con $m \neq 0$. Entonces existe un único par $q, r \in \mathbb{Z}$ tal que $a = q \cdot m + r$ y $0 \leq r < |m|$.
- **[Corolario]**: $\mathbb{Z}_n$ $(:= Z/\equiv_n)$ tiene n elementos:

$$\mathbb{Z}_n = \{[r]_n \mid 0 \leq r < n\}$$

2.- Sumatorias

- **[Sumatoria]**: Sea $(a_i)_{i\geq m}$ secuencia de números. Para $n \geq m$ se define la sumatoria de los términos de $(a_i)_{i\geq m}$ por:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \begin{cases} a_m & \text{si } n = m \\ a_n + \sum_{k=m}^{n-1} a_k & \text{si } n > m \end{cases}$$

- **[Propiedades importantes]**: Se tienen las siguientes propiedades:

I) $\sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1$

II) $\sum_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k$

III) $\sum_{k=m}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k \pm \sum_{k=m}^{n} b_k$

IV) $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+s}^{n+s} a_{k-s}$ para $s \in \mathbb{Z}$

V) $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{s} a_k + \sum_{k=s+1}^{n} a_k$

6.- Sumatorias

- **[Propiedades importantes]**: Se tienen las siguientes propiedades:

  I) $\sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1$

  II) $\sum_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k$

  III) $\sum_{k=m}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k \pm \sum_{k=m}^{n} b_k$

  IV) $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+s}^{n+s} a_{k-s}$ para $s \in \mathbb{Z}$

  V) $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{s} a_k + \sum_{k=s+1}^{n} a_k$

  VI) $\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$

- **[Sumas importantes]**: Algunas sumas relevantes:

  - $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
  - $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
  - $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ con $a \neq 1$

- **[Índices disjuntos]**: Sea $(a_k)_{k\in[1..n]}$ una secuencia de números reales y sean $I, J \subseteq [1..n]$ disjuntos. Entonces:

$$\sum_{k\in I\cup J} a_k = \sum_{k\in I} a_k + \sum_{k\in J} a_k$$

Obs.:$[1..n] = \{1, ..., n\}$

VI) $\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$

- **[Sumas importantes]**: Algunas sumas relevantes:

  - $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
  - $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
  - $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ con $a \neq 1$

- **[Intercambio de sumas dobles]**: Para una sumatoria doble $\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{kj}$ cuyos **límites inferiores y superiores no dependen de los índices**, se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{kj} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{kj}$$

3.- Conjuntos finitos

- **[Conjunto finito]**: Un conjunto A se dice finito si posee finitos elementos, es decir si $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que existe una función $f : A \to [1..n]$.

- **[Cardinal finito]**: Sea A un conjunto finito. Definimos el cardinal de A - denotado por $|A|$- como el único $n \in \mathbb{N}$ para el que existe una enumeración $a_1, ..., a_n$ de A.

- **[Propiedades varias]**:

  1. $|A| = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$
  2. $|A| = |B| \Leftrightarrow \exists f : A \to B$ biyectiva.
  3. Si B es finito y $A \subseteq B$, entonces A es finito y $|A| \leq |B|$
  4. Si A, B finitos disjuntos entonces $|A\cup B| = |A| + |B|$
  5. Si $B \subseteq A$ con A finito, entonces $|A \setminus B| = |A| - |B|$. En particular si $|A| = |B|$ entonces $A = B$
  6. Si A, B finitos, entonces $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

- **[Equivalencia para funciones]**: Si A, B finitos con $|A| = |B|$ y sea $f : A \longrightarrow B$ función. Son equivalentes:
  - f es inyectiva.
  - f es epiyectiva.
  - f es biyectiva.

- **[Propiedad importante]**: Sean A, B conjuntos con B finito. Se tiene:
  1. A es finito y $|A| \leq |B|$ si y solo si existe $f : A \to B$ inyectiva.
  2. A es finito y $|A| = |B|$ si y solo si existe $f : A \to B$ biyectiva.

- **[Cardinal producto]**: Sean A, B conjuntos finitos, se tiene que $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

- **[Conjunto de funciones]**: Sean A, B conjuntos, se define:

$$B^A := \{f : A \to B \mid f \text{ es función}\}$$

  Además, se cumple que $|B^A| = |B|^{|A|}$.

- **[Cantidad de inyecciones]**: Sean A, B conjuntos tales que $|A| = k$ y $|B| = n$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-k)!} &= |\{f : A \longrightarrow B | f \text{ es inyectiva }\}| \\ &= \#\text{ de k- tuplas } B^k \text{ sin repeticiones.} \end{aligned}$$

- **[Coeficiente Binominal]**: Para dos enteros n y k, $n \geq 0$, se define

$$\binom{n}{k}$$

  Este numero representa el numero de subconjuntos de tamaño k que posee un conjunto de tamaño n. Se verifica que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- **[Propiedades relevantes]**:

  a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

  b) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

- **[Binomio de Newton]**: Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

- **[Cardinal de la imagen de un conjunto]**: Si $f : A \longrightarrow B$ función, entonces$|f(A)| \leq |A|$

- **[Conjunto numerable]**: Un conjunto A se dira numerable si $|A| = |\mathbb{N}|$. En particular tenemos que $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son numerables.

- **[Propiedades Cardinal infinito]**: Sea A conjunto infinito, entonces:

  I) Si A infinito y B finito, entonces $|A| = |A \cup B| = |A \setminus B|$

  II) $\forall k \in \mathbb{N}$, existe un conjunto B_k tal que $B_k \subseteq A$ y $|B_k| = k$.

  III) $|A| \geq |\mathbb{N}|$ es decir el cardinal de los naturales es **el menor cardinal infinito**.

  Obs.: Si $|A| \leq |\mathbb{N}|$ entonces A es numerable.

- **[Álgebra de numerables]**:

  I) La unión numerable o finita de conjuntos numerables o finitos $(A_i)_{i \in I}$ (con $I \subseteq \mathbb{N}$) es a lo más numerable, es decir:

$$A := \bigcup_{i \in I} A_i$$

  Cumple que $|A| \leq |\mathbb{N}|$

  II) La unión finita de conjuntos numerables $(A_i)_{i=1}^n$ es numerable, es decir:

$$A := \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

  Es numerable.

  III) La unión numerable de conjuntos numerables $(A_i)_i^n$ es numerable, es decir:

$$A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

  Es numerable.

IV) El producto cartesiano finito de conjuntos numerables $(A_i)_{i=1}^{n}$ es numerable, es decir:

$$A := \prod_{i=1}^{n} A_i$$

Es numerable.

4.- Conjuntos Infinitos

- **[Producto numerable de finitos]**: El producto de una familia numerable de conjuntos finitos de tamaño dos no es numerable.

- **[Cardinal del conjunto potencia]**: El cardinal del conjunto potencia de un conjunto es mayor que el cardinal del conjunto, es decir: $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

- **[Cardinal Real]**: Se tiene que $|\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq |[0,1]|$. Esto implica que: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |[0,1]| = |\mathbb{R}|$