MA1101-6 Introducción al Álgebra 2020, Otoño
Profesora: Paulina Cecchi B.
Auxiliar: Patricio Yáñez Alarcón
Correo: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 09: Coeficientes Binomiales, cardinalidad Finita e Infinita

19 de Junio

P1. a) Demuestre sin usar inducción que

$$\frac{1\binom{n}{1}}{\binom{n}{0}} + \frac{2\binom{n}{2}}{\binom{n}{1}} + \ldots + \frac{n\binom{n}{n}}{\binom{n}{n-1}} = \binom{n+1}{2}.$$

Hint: *Escriba la expresión de la izquierda como una sumatoria y calcúlela usando propiedades de* $\binom{n}{k}$.

b) Calcule

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k}.$$

P2. Sea $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ Demuestre que

a) $|\{2i+1 : i \in \mathbb{N}, n \in \{1,...,m\}, 0 \leq i < 2^{n-1}\}| = 2^{m-1}$.

b) $\left|\left\{\frac{2i+1}{2^n} : i \in \mathbb{N}, n \in \{1,...,m\}, 0 \leq i < 2^{n-1}\right\}\right| = 2^m - 1$.

P3. a) Sean $A_1, ..., A_n$ conjuntos finitos. Demuestre que $|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i|$ si y sólo si para todo $i, j \in \{1, ..., n\}$, $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

b) Sea $\mathcal{C}$ una partición de un conjunto finito A de modo que para todo $X, Y \in \mathcal{C}$, $|X| = |Y|$. Demuestre que $|\mathcal{C}|$ divide a $|A|$.

P4. Demuestre que el siguiente conjunto es numerable:

$$C = \{x \in [0, \infty) \ | \exists n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}, x^n \in \mathbb{N}\}.$$

Propuestos

P5. ***Si nos da el tiempo***

Pruebe sin usar inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$$

P6. ***¿A o B?***

Sean A y B conjuntos tales que $A \cup B$ es numerable. Demuestre que A es numerable o B es numerable

P7. ***Biyecciones otra vez***

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ numerables. Demuestre que el conjunto $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ es numerable.

P8. Demuestre que para A, B y C conjuntos finitos

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

A partir de este resultado determine el cardinal del conjunto de todos los números menores que $100 * 7 * 13 * 19$ y que sean divisibles por 7 o 13 o 19.

Selección especial Preparación C2

P9. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{n} (n - i + 1) a_i$$

Sumas Dobles

P10. Si I es un conjunto finito, pruebe que el conjunto de sus partes ($\mathcal{P}(I)$) tiene cardinal finito dado por $|\mathcal{P}(I)| = 2^{|I|}$.
Biyecciones

P11. Demuestre, sin usar inducción, que

$$\sum_{i=5}^{n} \sum_{j=1}^{i} \frac{i+1}{j(j+1)} = \frac{(n-4)(n+5)}{2}$$

P12. Se define en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ la relación $\mathcal{R}$ por:

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow xy > 0$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia. Calcule El conjunto cuociente $(\mathbb{R} \setminus \{0\})/\mathcal{R}$

Resumen

- **[Cantidad de inyecciones]**: Sean A, B conjuntos tales que $|A| = k$ y $|B| = n$. Se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{n!}{(n-k)!} &= |\{f : A \longrightarrow B | f \text{ es inyectiva }\}| \\ &= \# \text{ de k- tuplas } B^k \text{ sin repeticiones.}\end{aligned}$$

- **[Coeficiente Binominal]**: Para dos enteros n y k, $n \geq 0$, se define

$$\binom{n}{k}$$

Este numero representa el numero de subconjuntos de tamaño k que posee un conjunto de tamaño n. Se verifica que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- **[Propiedades relevantes]**:
  a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
  b) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

- **[Binomio de Newton]**: Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

- **[Cardinal de la imagen de un conjunto]**: Si $f : A \longrightarrow B$ función, entonces$|f(A)| \leq |A|$

- **[Conjunto numerable]**: Un conjunto A se dira numerable si $|A| = |\mathbb{N}|$. En particular tenemos que $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son numerables.

- **[Propiedades Cardinal infinito]**: Sea A conjunto infinito, entonces:
  i) Si A infinito y B finito, entonces $|A| = |A \cup B| = |A \setminus B|$
  ii) $\forall k \in \mathbb{N}$, existe un conjunto B_k tal que $B_k \subseteq A$ y $|B_k| = k$.
  iii) $|A| \geq |\mathbb{N}|$ es decir el cardinal de los naturales es **el menor cardinal infinito**.

Obs.: Si $|A| \leq |\mathbb{N}|$ entonces A es numerable.

- **[Álgebra de numerables]**:
  i) La unión numerable o finita de conjuntos numerables o finitos $(A_i)_{i \in I}$ (con $I \subseteq \mathbb{N}$) es a lo más numerable, es decir:

$$A := \bigcup_{i \in I} A_i$$

  Cumple que $|A| \leq |\mathbb{N}|$

  ii) La unión finita de conjuntos numerables $(A_i)_{i=1}^{n}$ es numerable, es decir:

$$A := \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

  Es numerable.

  iii) La unión numerable de conjuntos numerables $(A_i)_i^n$ es numerable, es decir:

$$A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

  Es numerable.

  iv) El producto cartesiano finito de conjuntos numerables $(A_i)_{i=1}^{n}$ es numerable, es decir:

$$A := \prod_{i=1}^{n} A_i$$

  Es numerable.

“No tengo frase, pero que les vaya bacan!”
Pato