

Sim inducción

a) $\frac{P_1}{\text{L}} \Rightarrow \frac{1 \binom{m}{1}}{\binom{m}{0}} + \frac{2 \binom{m}{2}}{\binom{m}{1}} + \dots + \frac{m \binom{m}{m}}{\binom{m}{m-1}} = \binom{m+1}{2} \quad (1)$

Pasamos a sumatoria

$$= \sum_{k=1}^m \frac{k \binom{m}{k}}{\binom{m}{k-1}} \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=1}^m \frac{k \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!}}{\frac{m!}{(k-1)!(m-k+1)!}} \stackrel{(2)}{=} \sum_{k=1}^m \frac{(m-k+1)!}{(m-k)!} \quad (3)$$

Handwritten notes: $k-1! \cdot k = k!$, $k!$ cancel

$$= \sum_{k=1}^m \frac{(m-k+1)(m-k)!}{(m-k)!} \stackrel{(4)}{=} \sum_{k=1}^m (m+1-k) \stackrel{(5)}{=} \sum_{k=1}^m (m+1) - \sum_{k=1}^m k \quad (6)$$

Handwritten notes: (5) linealidad

$$= \sum_{k=1}^m (m+1) - \frac{m(m+1)}{2} \stackrel{(7)}{=} \underbrace{(m+1)(m-1+1)}_{\text{suma constante } 0} - \frac{m(m+1)}{2} = \frac{m(m+1)}{2} \quad (8)$$

Handwritten notes: (7) suma constante

$$= \frac{m(m+1)(m-1)!}{2!(m-1)!} = \frac{(m+1)!}{(m+1-2)! \cdot 2!} \quad (9)$$

$$\stackrel{(12)}{=} \binom{m+1}{2} //$$

b) Calcule

2

$$\sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)} \binom{m}{k}$$

multiplicamos por
un 1 conveniente
Para poder sumar con
el coeficiente binomial.

$$= \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)} \binom{m}{k} \underbrace{\frac{(m+1)(m+2)}{(m+1)(m+2)}}_{k! \cdot 1}$$

$$= \sum_{k=0}^m (-1)^k \cdot \frac{m!}{(m-k)!k!} \cdot \frac{(m+1)(m+2)}{(k+1)(k+2)} \cdot \frac{1}{(m+1)(m+2)}$$

ordenó
no depende de k sale por linealidad.

$$= \frac{1}{(m+1)(m+2)} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k (m+2)!}{(m-k)! (k+2)!}$$

↓ agrupo factoriales

↓ coeficiente binomial
ya $(m+2-(k+2)) = (m-k) //$

$$= \frac{1}{(m+1)(m+2)} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m+2}{k+2}$$

↓ cambio índice
 $(-1)^{k+2} = (-1)^k (-1)(-1) = (-1)^k$

$$= \frac{1}{(m+1)(m+2)} \sum_{k=2}^{m+2} (-1)^{k-2} \binom{m+2}{k}$$

$$= \frac{1}{(m+1)(m+2)} \left[\sum_{k=0}^{m+2} (-1)^k \binom{m+2}{k} - (-1)^1 \binom{m+2}{1} - (-1)^0 \binom{m+2}{0} \right]$$

↓ me gusta así
pone
suma $k=1$
y $k=0$

$$= \frac{1}{(m+1)(m+2)} \left[\sum_{k=0}^{m+2} (-1)^{m+2-k} (-1)^k \binom{m+2}{k} + \frac{(m+2)!}{(m-1)!1!} - \frac{(m+2)!}{(m+2)!0!} \right]$$

↓ $\cdot 1^{m+2-k} = 1$

no cambio
muda solo
escrito forma

$$= \frac{1}{(m+1)(m+2)} \left[(1-1)^{m+2} + m+2 - 1 \right]$$

$$\downarrow 0^k = 0 ; k \neq 0$$

③

$$= \frac{1}{m+2} //$$

P2) $\forall m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ Dem

(4)

$$a) |\{2i+1 : i \in \mathbb{N}, m \in \{1, \dots, m\}, 0 \leq i \leq 2^{m-1}\}| = 2^{m-1}$$

Veamos que si fijamos m podemos definir un

$$\text{conjunto } A_m = \{2i+1 : i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq 2^{m-1}\}$$

$$\text{luego } A = \{2i+1 : i \in \mathbb{N}, m \in \{1, \dots, m\}, 0 \leq i \leq 2^{m-1}\}$$

donde vemos que si tenemos todo $\{1, \dots, m\}$

entonces $A = \bigcup_{i=1}^m A_i$; como nos pide calcular la

cardinalidad la idea será calcular la de algún conjunto más fácil o abordable

Veamos como se comporta $m=1$

$$i=0 \quad \text{es } 2 \cdot 0 + 1 = 1 \in \mathbb{N}$$

$$i=1 \quad \text{es } 2 \cdot 1 + 1 = 3 \in \mathbb{N}$$

$$i=2 \quad \text{es } 2 \cdot 2 + 1 = 5 \in \mathbb{N}$$

$$i=3 \quad \text{es } 2 \cdot 3 + 1 = 7 \in \mathbb{N}$$

$$0 \leq 0 \leq 2^{1-1} = 1 \quad \checkmark \quad 1, 3 \in A_1$$

$$0 \leq 1 \leq 1$$

$$0 \leq 2 \leq 1 \quad \times$$

$$0 \leq 3 \leq 1 \quad \times$$

luego $m=2$

$$i=0 \quad \text{es } 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$i=1 \quad \text{es } 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$i=2 \quad \text{es } 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$i=3 \quad \text{es } 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$0 \leq 0 \leq 2$$

$$0 \leq 1 \leq 2$$

$$0 \leq 2 \leq 2$$

$$0 \leq 3 \leq 2 \quad \times$$

$$\Rightarrow 1, 3, 5 \in A_2$$

$$m = 20$$

$$i = 0 \quad \text{es} \quad 2 \cdot 0 + 1 = 1, \quad 0 \leq 0 \leq 2^{19} \quad \checkmark$$

$$i = 1 \quad \text{es} \quad 2 \cdot 1 + 1 = 3, \quad 0 \leq 1 \leq 2^{19} \quad \checkmark$$

$$\vdots$$

$$i = 2^{19} \quad \text{es} \quad 2 \cdot 2^{19} + 1 = 2^{20} + 1, \quad 0 \leq 2^{19} \leq 2^{19} \quad \checkmark$$

X

$$\Rightarrow 1, 3, 5, \dots, 2^{20+1} \in A_{20}$$

Podemos ver que si m es mayor los A_m son mayores,
 pero cuál es el tope? m pues $m \in \{1, \dots, m\}$

luego $m = m$ es $i \in \mathbb{N}$, $2 \cdot m + 1$ $0 \leq i \leq 2^{m-1}$

luego están contenidos los impares en los anteriores,
 observamos $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_m$ por lo que probaremos

pdq: $\forall m \in \{1, \dots, m\} \quad A_m \subseteq A_m$

sea $x \in A_m$, esto es $\exists i \in \{0, \dots, 2^{m-1} - 1\}$ (por la condición
 existe $0 \leq i \leq 2^{m-1}$
 anterior en $\mathbb{N}$)

$$\text{tg} \quad x = 2i + 1$$

$$\text{pero si} \quad i \in \{0, 1, \dots, 2^{m-1} - 1\}$$

$$\Rightarrow i \in \{0, 1, \dots, 2^{m-1} - 1, 2^{m-1}\} \quad \text{pues } m \geq m$$

$$\Rightarrow x \in A_m$$

$$\text{luego} \quad A = \bigcup_{k=1}^m A_k = A_m \quad \text{luego su cardinalidad} \quad |A| = |\{2i+1, i \in \{0, \dots, 2^{m-1}-1\}\}|$$

$$= 2^{m-1} //$$

Definamos un conjunto y trabajemos de manera similar

Sea el conjunto $B = \left\{ \frac{2i+1}{2^m} ; i \in \mathbb{N}, m \in \{1, \dots, m\}, 0 \leq i < 2^{m-1} \right\}$

$$B_m = \left\{ \frac{2i+1}{2^m} ; i \in \mathbb{N}, 0 \leq i < 2^{m-1} \right\} ; m \in \{1, \dots, m\}$$

y notemos ~~que~~ $B = \bigcup_{m=1}^m B_m$ vemos que son conjuntos disjuntos

Esto para poder calcular la cardinalidad de la unión como la suma de cada conjunto

• Sea $B_i, B_j \in \{B_m | m \in \mathbb{N}, i, j \in \mathbb{N} \text{ t.q. } i \neq j\}$ queremos probar que $B_i \cap B_j = \emptyset$ por contradicción, sea $x \in B_i \cap B_j$
 $\Rightarrow x \in B_i \wedge x \in B_j$ luego $\exists i \in \mathbb{N} \text{ t.q. } x = \frac{2i+1}{2^{m_i}}$ (el caso de ser contrario es válido e mutuo)

$$x \in B_i \Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N}, x = \frac{2i+1}{2^{m_i}}, i \in \{0, \dots, 2^{m_i-1}\}$$

$$x \in B_j \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{N}, x = \frac{2j+1}{2^{m_j}}, j \in \{0, \dots, 2^{m_j-1}\}$$

$$\text{luego } x = \frac{2i+1}{2^{m_i}} = \frac{2j+1}{2^{m_j}} \Leftrightarrow 2^{m_j-m_i} (2i+1) = 2j+1$$



Pues potencias de 2 que no es 0 equivale a par • Impar = par $\neq$ Impar = $2j+1$

$$\therefore B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$$

$$\text{luego } |B| = \left| \bigcup_{k=1}^m B_k \right| = \sum_{k=1}^m |B_k| = \sum_{k=1}^m 2^{k-1} \stackrel{\text{cambio } m \rightarrow j}{=} \sum_{k=0}^m 2^k = \frac{2^{m+1} - 1}{2 - 1} = 2^{m+1} - 1 //$$

P3/1

7

2) Sean $A_1, \dots, A_m$ conjuntos finitos. Dem $|\bigcup_{i=1}^m A_i| = \sum_{i=1}^m |A_i| \Leftrightarrow \forall i, j \in \{1, \dots, m\}, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$

$\Rightarrow$ Veamos que tenemos $|\bigcup_{i=1}^m A_i| \leq \sum_{i=1}^m |A_i|$ Por inducción si $A_1, \dots, A_m$ finitos
luego $m=1$ $|A_1| = |A_1|$; $m=2$ $|\bigcup_{i=1}^2 A_i| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$ por hipótesis
 $\leq |A_1| + |A_2| = \sum_{i=1}^2 |A_i|$

inductiva ahora vemos, sea algun $m \in \mathbb{N}$ tq $|\bigcup_{i=1}^m A_i| \leq \sum_{i=1}^m |A_i|$ luego
pq $P(m+1) \Leftrightarrow |\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i| \leq \sum_{i=1}^{m+1} |A_i|$; pero $|\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i| = |\bigcup_{i=1}^m A_i \cup A_{m+1}|$

$$\Rightarrow |\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i| = |\bigcup_{i=1}^m A_i| + |A_{m+1}| - |\bigcup_{i=1}^m A_i \cap A_{m+1}|$$

$$\leq |\bigcup_{i=1}^m A_i| + |A_{m+1}| \leq \sum_{i=1}^m |A_i| + |A_{m+1}| = \sum_{i=1}^{m+1} |A_i| //$$

luego usemos $|\bigcup_{i=1}^m A_i| \leq \sum_{i=1}^m |A_i|$ Para probar lo pedido, $\forall A_1, \dots, A_m$ finitos

Por contradicción entonces $A_i \cap A_j \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists x \in A_i \cap A_j, i \neq j$

$$\text{luego } |\bigcup_{k=1}^m A_k| = |\bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^m A_k \cup A_i \cup A_j| \leq |\bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^m A_k| + |A_i \cup A_j|$$

$$\leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^m |A_k| + |A_i| + |A_j| - |A_i \cap A_j|$$

pero $\exists x \in A_i \cap A_j$, por lo que $|A_i \cap A_j| > 0$ luego

$$|\bigcup_{k=1}^m A_k| < \sum_{k=1}^m |A_k|$$

~~Explosión~~

Pues mi hipótesis es $|\bigcup_{k=1}^m A_k| = \sum_{k=1}^m |A_k| //$

b) ≤ la probaremos por inducción. Sabemos $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$
 y $\{A_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ es familia finita. Luego $m=1$ $|A_1| = |A_1|$ ✓
 $m=2$ $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = \sum_{i=1}^2 |A_i|$, luego hipótesis
 inducción para algún $m \in \mathbb{N}$ $p(m)$ i.e. $|\bigcup_{i=1}^m A_i| = \sum_{i=1}^m |A_i|$

$$\text{Veamos } p(m+1) \text{ es decir, } |\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i| = |\bigcup_{i=1}^m A_i \cup A_{m+1}| = |\bigcup_{i=1}^m A_i| + |A_{m+1}| - |\bigcup_{i=1}^m A_i \cap A_{m+1}|$$

$$= \sum_{i=1}^m |A_i| + |A_{m+1}| + 0 = \sum_{i=1}^{m+1} |A_i|$$

0 por hipótesis
 pues $\exists i, -m' \neq m+1$

∴ se tiene lo pedido //

b) Sea C partición de conj finita $\forall x, y \in C, |x| = |y|$ PDG.
 $|C|$ divide a $|A|$

Tenemos que por ser partición recubre el conjunto y es disjunta
 a pares por lo que $\bigcup_{k \in C} X_k = A$ luego $|\bigcup_{k \in C} X_k| = |A|$

$$\text{Como son disjuntos } \sum_{k \in C} |X_k| = |A| \Rightarrow \sum_{k \in C} l = |A|$$

$$= l \cdot |C| = |A| \Leftrightarrow |C| \mid |A|$$

$|C|$ divide a $|A|$
 por contradicción de
 enteros //

Ya terminamos !

Cualquier duda a pyanez@din.uchile.cl

b) Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

y $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

P.D.Q.

$$\sum_{h=1}^n \sum_{i=1}^h a_i = \sum_{i=1}^n (n-i+1) a_i$$

En efecto: Partamos del lado izquierdo como la sumatoria de adentro tiene dependencia en h en su límite superior,

definimos
$$b_{i,h} = \begin{cases} a_i & \text{si } i \leq h \\ 0 & \text{si } i \in \{h+1, \dots, n\} \end{cases}$$

Luego:

$$\sum_{i=1}^h a_i = \sum_{i=1}^n b_{i,h}$$

→ podemos la dependencia de h en $b_{i,h}$

Así:

$$\sum_{h=1}^n \sum_{i=1}^h a_i = \sum_{h=1}^n \sum_{i=1}^n b_{i,h}$$

→ Ahora podemos dar vuelta los sumos!

damos vuelta los sumos

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^n b_{i,h}$$

recordemos que $b_{i,h} = 0$ si $i \geq h+1 \Leftrightarrow i-1 \geq h$

luego
$$\sum_{h=1}^n b_{i,h} = \sum_{h=i}^n b_{i,h} \rightarrow \text{por los terminos tal que } h < i \text{ son } 0$$

Así:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^n b_{i,h} = \sum_{i=1}^n \sum_{h=i}^n b_{i,h} = \sum_{i=1}^n \sum_{h=i}^n a_i$$

↓
por $i \leq h$
en la suma

$$= \sum_{i=1}^m e_i \left(\sum_{h=i}^n 1 \right) = \sum_{i=1}^n e_i \cdot (n - i + 1)$$

e_i no depende de k

que es justo a lo que queríamos llegar.

Por ende:

$$\sum_{h=1}^m \sum_{i=1}^h e_i = \sum_{i=1}^n (n - i + 1) e_i$$

Punto Control TD

P1] a) P.D.Q.
$$\sum_{i=5}^n \sum_{j=1}^i \frac{i+1}{j(j+1)} = \frac{(n-4)(n+5)}{2}$$

En efecto:

Calculamos la suma interior primero:

$$\sum_{j=1}^i \frac{i+1}{j(j+1)} = (i+1) \sum_{j=1}^i \frac{1}{j(j+1)}$$

La suma depende
de j , por ende $(i+1)$
es constante para la
suma

$$= (i+1) \sum_{j=1}^i \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$$

Usando que

$$\frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$$

$$= (i+1) \left[1 - \frac{1}{i+1} \right] = i+1 - 1 = i$$

↓
Telescópico!

Por ende:

$$\sum_{i=5}^n \sum_{j=1}^i \frac{i+1}{j(j+1)} = \sum_{i=5}^n i$$

Como comienza desde $i=5$ lo reescribimos como resta de sumas:

$$= \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^4 i$$

→ hasta 4 por la suma empezada desde $i=5$
Le quitamos los primeros 4 términos

$$= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{4(4+1)}{2} = \frac{n^2 + n - 4 \cdot 5}{2}$$

$$= \frac{(n-4)(n+5)}{2}$$

Que es lo que queríamos!

$$\therefore \sum_{i=5}^n \sum_{j=1}^i \frac{i+1}{j(j+1)} = \frac{(n-4)(n+5)}{2}$$

b) en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$x R y \Leftrightarrow x \cdot y > 0$$

1) P.D.Q. R es de equivalencia

En efecto: Veamos que R es reflexivo, simétrico y transitivo:

1) Reflexivo: Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ arbitrario:

$$x R x \Leftrightarrow x \cdot x > 0 \Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow V$$

$\therefore R$ es reflexivo al ser x arbitrario

↓
pues si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 $\Leftrightarrow x \neq 0$ luego $x^2 > 0$

2) Simétrico: Sean $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ arbitrarios:

$$x R y \Leftrightarrow x \cdot y > 0 \Leftrightarrow y \cdot x > 0 \Leftrightarrow y R x$$

↓
Def R

↓
Def R

$\therefore$ Como $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ son arbitrarios, se concluye que R es simétrico

3) Transitiva: Sean $x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ arbitrarios:

Supongamos que $x R y \wedge y R z$. Probatemos que $x R z$:

$$\begin{aligned} \text{Como } \left\{ \begin{array}{l} x R y \Leftrightarrow x \cdot y > 0 \\ y R z \Leftrightarrow z \cdot y > 0 \end{array} \right. & \Rightarrow (x \cdot y) \cdot (z \cdot y) > 0 \\ & \Leftrightarrow xz \cdot y^2 > 0 \end{aligned}$$

Como $y^2 > 0$ por $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tenemos que:

$$xz y^2 > 0 \quad | \cdot \frac{1}{y^2}$$

$$\Leftrightarrow xz > \frac{0}{y^2} = 0$$

$$\therefore xz > 0 \Leftrightarrow x R z \quad | \text{Def de } R$$

$\therefore$ Como $x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ son arbitrarios, se concluye que R es transitiva.

finalmente como R es reflexiva, simétrica y transitiva, R es una relación de equivalencia.

2) Encontramos $(\mathbb{R} \setminus \{0\})/R$ ahora:

$$\text{Sea } [x] \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})/R$$

con $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}/R$ arbitrario.

$$\text{Si } y \in [x] \Leftrightarrow x R y$$

$$\Leftrightarrow x \cdot y > 0$$

$$\Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ tienen igual signo}$$

$$\cdot \text{ Si } x > 0 \Rightarrow y > 0$$

$$\cdot \text{ Si } x < 0 \Rightarrow y < 0$$

$$\therefore \text{ Si } x > 0: [x] = \{y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid y > 0\}$$

$$= \mathbb{R}_+^* \rightarrow \text{positivos sin el } 0$$

$$\text{Si } x < 0: [x] = \{y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid y < 0\} = \mathbb{R}_-^*$$

$$\text{luego: } (IR|204)|R = \{IR_+^*, IR_-^*\}$$

Concluyendo lo pedido