MA1101-3 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliar: Felipe Hernández Castro

Resumen C3 Formativo

Julio

8.- Conjuntos Infinitos

- [**Producto numerable de finitos**]: El producto de una familia numerable de conjuntos finitos de tamaño dos no es numerable.
- [**Cardinal del conjunto potencia**]: El cardinal del conjunto potencia de un conjunto es mayor que el cardinal del conjunto, es decir: $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.
- [**Cardinal Real**]: Se tiene que $|\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq |[0,1]|$. Esto implica que: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |[0,1]| = |\mathbb{R}|$

9.- Estructuras algebraicas

- [**Ley de composición interna**]: Dado $A \neq \emptyset$. Se define una l.c.i. como:

$$\begin{array}{rccc} *: & A \times A & \to & A \\ & (x,y) & \to & x * y \end{array}$$

- [**Estructura algebrica**]: Si $*$ es l.c.i. en A, $(A,*)$ es llamado estructura algebraica. Si existe otra l.c.i Δ denotaremos $(A,*,\Delta)$
- [**Definiciones varias**]: Sea $(A,*)$ estructura algebrica:

  I) $*$ es **asociativa** si:

  $$\forall x,y,z \in A, (x*y)*z = x*(y*z)$$

  II) $e \in A$, se dira **neutro** para $*$ si:

  $$\forall x \in A, e*x = x*e = x$$

  III) Si e neutro, y $x \in A$, diremos que x tiene **inverso** si existe $y \in A$ tal que:

  $$x*y = y*x = e$$

  IV) $*$ es **conmutativa** si:

  $$\forall x,y \in A, x*y = y*x$$

  V) $a \in A$ es **absorbente** si:

  $$\forall x \in A, x*a = a*x = a$$

  VI) $a \in A$ es **idempotente** si

  $$a*a = a$$

  VII) $a \in A$ es **cancelable** si $\forall y,z \in A$:

  $$\begin{array}{c} a*y = a*z \Rightarrow y = z \\ y*a = z*a \Rightarrow y = z \end{array}$$

  VIII) Dado $(A,*,\Delta)$ diremos que Δ **distribuye** con respecto a $*$ si $\forall x,y,z \in A$:

  $$\begin{array}{c} x\Delta(y*z) = (x\Delta y)*(x\Delta z) \\ (y*z)\Delta x = (y\Delta x)*(z\Delta x) \end{array}$$

- [**Cancelabilidad**]: Sea $(A,*)$ e.a., se tiene que $a \in A$ es cancelable si y solo si las funciones $I_a(x) = a*x$ y $D_a(x) = x*a$ para $x \in A$ son inyectivas
- [**Unicidad del neutro**]: Una e.a. $(A,*)$ posee a lo más un neutro.
- [**Unicidad del inverso**]: Si la e.a. $(A,*)$ tiene neutro e y $*$ es asociativa, entonces los inversos (en el caso en que existan) son únicos.
- [**Propiedades varias**]: Si $(A,*)$ es e.a. asociativa con neutro e, entonces también cumple:

  I) Si $x \in A$ posee inverso, entonces x^{-1} también. Más aún $(x^{-1})^{-1} = x$.

  II) Si $x,y \in A$ poseen inversos, entonces $x*y$ también y se tiene $(x*y)^{-1} = y^{-1}*x^{-1}$

  III) Si $x \in A$ posee inverso, entonces x es cancelable.

9.- Homomorfismos

- [**Homomorfismos**]: Una función $f: A \to B$ es un **homomorfismo** entre las estructuras algebraicas $(A,*)$ y (B,Δ) si:

$$\forall x,y \in A, \ f(x*y) = f(x)\Delta f(y)$$

  - Si f inyectiva se dirá **monomorfismo**.

- Si f es epiyectiva se dirá **epimorfimo**.
- Si f es biyectiva se dirá **isomorfismo**.
- Si $(A,*) = (B,\Delta)$ los homomorfismo se llaman **endomorfismos**. Si son biyectivos se llaman **automorfismos**

- [**Props epimorfismos**]: Si $f : A \to B$ epimorfismo entre $(A,*)$ y (B,Δ), entonces se tienen las siguientes propiedades:

  I) Si $(A,*)$ es asociativa, entonces (B,Δ) tambien lo es.
  II) Si $(A,*)$ es conmutativa, entonces (B,Δ) tambien lo es.
  III) Si e es neutro para $(A,*)$, entonces $f(e)$ lo es para (B,Δ).
  IV) Si a tiene inverso b para $(A,*)$, entonces $f(a)$ tiene inverso $f(b)$ para (B,Δ).

- [**Props. más generales**]: Sea f un homomorfismo de $(A,*)$ a (B,Δ), con neutros e_A y e_B:

  I) Si $e_B \in f(A)$, entonces $e_B = f(e_A)$.
  II) Si $e_B \in f(A)$ y $a \in A$ tiene inverso b, entonces $f(a)$ tiene inverso $f(b)$.

- [**Composición**]: Si $f : A \to B$ un homeomorfismo de $(A,*)$ en (B,Δ) y $g : B \to C$ un homemorfismo de (B,Δ) en $(C,\bullet)$, entonces la composición de f con g, $g \circ f : A \to C$, es un homomorfismo de $(A,*)$ en $(C,\bullet)$.

- [**Estructuras isomorfas**]: Dos estructuras $(A,*)$ y (B,Δ) son isomorfas, denotado $(A,*) \cong (B,\Delta)$, si existe una función $f : A \to B$ isomorfismo.
  Obs.: $\cong$ es una relación de equivalencia.

- [**Isomorfismo inverso**]: Si $f : A \to B$ es un isomorfimos entre $(A,*)$ y (B,Δ), entonces $f^{-1} : B \to A$ es un isomorfismo entre (B,Δ) y $(A,*)$.

- [**Estructura de funciones**]: Sea $(B,*)$ una e.a., entonces $(B^A,*)$ sera una e.a., donde si $f,g \in B^A$ definimos $f*g : A \to B$ por:

$$(f*g)(x) = f(x)*g(x)$$

- [**Propiedades varias**]:

  I) Si $(B,*)$ es asociativa, entonces $(B^A,*)$ también.
  II) Si $(B,*)$ es conmutativa, entonces $(B^A,*)$ también.
  III) Si $(B,*)$ tiene neutro e, entonces $f \in (B^A,*)$ dado por $f(x) = e$ (función constante) es neutro de $(B^A,*)$

- [**Estructura de pares ordenados**]: Sean $(A_1,*_1)$ y $(A_1,*_1)$ e.a., se define la l.c.i. $\otimes$ sobre $A_1 \times A_2$ por: Para $(a_1,a_2),(b_1,b_2) \in A_1 \times A_2$:

$$(a_1,a_2) \otimes (b_1,b_2) = (a_1 *_1 b_1, a_2 *_2 b_2)$$

- [**Propiedades varias**]:

  I) Si $(A_1,*_1)$,$(A_2,*_2)$ son asociativas, entonces $(A_1 \times A_2, \otimes)$ también.
  II) Si $(A_1,*_1)$,$(A_2,*_2)$ son conmutativas, entonces $(A_1 \times A_2, \otimes)$ también.
  III) Si $(A_1,*_1)$,$(A_2,*_2)$ poseen neutros e_1 y e_2, entonces $(A_1 \times A_2, \otimes)$ posee neutro (e_1,e_2)
  IV) Si a_1,a_2 poseen inversos b_1,b_2 en $(A_1,*_1)$,$(A_2,*_2)$, entonces (a_1,a_2) posee inverso (b_1,b_2) en $(A_1 \times A_2, \otimes)$.

10.- Grupos

- [**Grupo**]: Sea $(G,*)$ una e.a., diremos que:
  - Es **grupo** si $*$ es asociativa, tiene neutro y todo elemento posee inverso.
  - Es **grupo abeliano** si es grupo y $*$ es conmutativa.

- [**Propiedades grupos**]: Sea $(G,*)$ grupo, entonces:

  I) $\forall a,b \in G, a*x_1 = b \Leftrightarrow x_1 = a^{-1}*b$
  $\forall a,b \in G, x_2*a = b \Leftrightarrow x_1 = b*a^{-1}$
  Es decir, las ecuaciones tienen una única solución.
  II) $\forall a \in G$ las funciones $I_a(x) = a*x$ y $D_a(x) = x*a$ son biyectivas.
  III) El unico elemento idempotente es el neutro.
  IV) Si (K,Δ) una e.a. y $f : G \to K$ homomorfismo, entonces $(f(G),\Delta)$ es grupo.
  V) Si (K,Δ) una e.a., un homomorfismo $f : G \to K$ es monomorfismo (inyectivo) si y solo si $f^{-1}(\{e_K\}) = \{e_G\}$

- [**Grupos importantes**]:
  - Si $(G,*)$ es grupo (abeliano) y $A \neq \emptyset$, entonces $(G^A,*)$ es grupo (abeliano)
  - Si $(G_1,*_1)$, $(G_2,*_2)$ son grupos (abelianos), entonces $(G_1 \times G_2, \otimes)$ es grupo (abeliano).