P1 Sean $z_0, \dots, z_{n-2}$ raíces n-ésimos de la unidad. Pruebe que

$$z_0 \cdot z_1 + z_1 \cdot z_2 + \cdots + z_{n-1} z_0 = 0$$

Solución:

Recordamos que las raíces de la unidad son $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ con $k \in [0, \dots, n-2]$

Entonces reescribimos la sumatoria como

$$\sum_{k=0}^{n-2} z_k \cdot z_{k+1} + z_{n-1} \cdot z_0 = \sum_{k=0}^{n-2} e^{\frac{2k\pi}{n} + \frac{2k\pi + 2\pi}{n}} + e^{\frac{2(n-2)\pi}{n}} \cdot 1$$

Pero $1 = e^{\frac{2n\pi}{n}}$, por lo tanto lo podimos entrar a la sumatoria

$$= \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2k\pi}{n} + \frac{2(k+1)\pi}{n}} = e^{\frac{2\pi}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{4k\pi}{n}} = e^{\frac{2\pi}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{4\pi}{n}}\right)^k$$

si $n > 2$, entonces $e^{\frac{4\pi}{n}} \neq 1$ y usamos la fórmula de la suma geométrica

$$= e^{\frac{2\pi}{n}} \cdot \frac{1 - \left(e^{\frac{4\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{4\pi}{n}}} = 0 \quad // \quad \text{Porque } \left(e^{\frac{4\pi}{n}}\right)^n = 1$$

P1

Aux 7

b) Probemos la indicación:

Las raíces cúbicas de 1 son:

$w_0 = e^0 = 1$

$w_1 = e^{\frac{2\pi}{3}i}$

$w_2 = e^{\frac{4\pi}{3}i}$

y por la parte a)

$w_0 \cdot w_1 + w_1 \cdot w_2 + w_2 \cdot w_0 = 0 \quad , \quad w_0 = 1$

$w_1 + w_1 \cdot w_2 + w_2 = 0 \quad (\blacksquare)$

y $w_1 \cdot w_2 = e^{\frac{2\pi}{3}i} \cdot e^{\frac{4\pi}{3}i} = e^{\frac{6\pi}{3}i} = 1$

$\Rightarrow w_1 + 1 + w_2 = 0$

finalmente $w_1^2 = e^{\frac{4\pi}{3}i} = w_2$ y $w_2^2 = e^{2\pi i + \frac{2\pi}{3}} = w_1 \quad (\blacktriangle)$

sea $w = w_2$ ó w_2

$(1+w)^{2016} + (1+w^2)^{405} + (1+w^3)^5$

$= (-w^2)^{2016} + (-w)^{405} + (2)^5$ usando $(\blacksquare)$ y $(\blacktriangle)$

$1 + 1 + 32$ porque 2016 es divisible por 3 y par mientras que 405 es impar.

Escaneado con CamScanner

P2

Aux 7

f y $\bar{f}$ son holomorfas en $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ f es constante

$f(x+iy) = u(x,y) + v(x,y)i$ y

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Pero $\bar{f}(x+iy) = u(x,y) - i\,v(x,y)$

entonces $$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$\hookrightarrow$ $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ y $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$

porque 0 es el único número igual a su inverso.

$\hookrightarrow$ $v(x,y)$ es constante y con el mismo análisis llegamos a $u(x,y)$ constante

P3

Aux 7

$$f(z) = |z-a| \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

¿Dónde en $\mathbb{C}$ es $f(z)$ derivable?

Recordamos que $|z-a| = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$

Para $z = x + iy$

$$f(z) = f(x,y) = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + 0 \cdot i$$

Si la función es holomorfa se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Pero $v = 0$, entonces $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 = \frac{\partial u}{\partial y}$

Sólo cuando esto se cumpla la función será derivable en el sentido complejo (Holomorfa)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0 \text{ en } x = a$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{(y)^2 + (x-a)^2}} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0 \text{ en } y = 0$$

Pero en $(a,0)$ $\sqrt{y^2 + (x-a)^2} = 0$ y la norma no es derivable en ese punto

$\therefore$ La función no es nunca derivable en el sentido complejo.