MA2002-1,3. Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Michał Kowalczyk
Auxiliares: Camilo Gómez, Javiera Palominos, Camilo Ramírez C.

Auxiliar 2(Grupo 3): Repaso Integración Multivariable

Lunes 23 de Marzo, 2020.

- **Teorema de Fubini** *Sean* $R_1 \subset \mathbb{R}^N$, $R_2 \subset \mathbb{R}^m$, $R = R_1 \times R_2$ *y* $f : R \to \mathbb{R}$ *una función integrable, y tal que las funciones*

$$x \in R_1 \mapsto \int_{R_2} f(x,y)dy, \quad y \in R_2 \mapsto \int_{R_1} f(x,y)dx$$

están bien definidas y son integrables. Entonces se tiene la validez de las igualdades

$$\int_R f = \int_{R_1} \left(\int_{R_2} f(x,y)dy \right) dx = \int_{R_2} \left(\int_{R_1} f(x,y)dx \right) dy$$

- **Teorema del cambio de variable** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un abierto y* $T : \Omega \to \mathbb{R}_N$ *una función de clase* C^1. *Sea* D' *una región abierta y acotada con* $Adh(D') \subset \Omega$ *y supongamos además que* T *es inyectiva en* D' *que la matriz* $T'(u)$ *es invertible para todo* $u \in D'$ *y que* $D = T(D')$ *es un abierto. Sea* $f : \bar{D} \to \mathbb{R}$ *una función continua. Se tiene entonces la validez de la igualdad*

$$\int_D f(x)dx = \int_{D'} f(T(u) \left| det(T'(u)) \right| du$$

Problemas

P1. Pruebe la siguiente igualdad:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

P2. Calcule la siguiente integral:

$$I = \int_0^1 \int_z^1 \int_y^1 e^{x^3} dxdydz$$

Hint: Use dos veces el teorema de Fubini, cambiando el orden de integración adecuadamente.

P3. Calcule el volumen de la elipsoide dado por:

$$E := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

recuerriendo para ello a un cambio de variable conveniente.

Propuesto

P1. Una pirámide está limitada por los tres planos coordenados y el plano $x + 2y + 3z = 6$. Calcular su volumen por integración múltiple.