→ PAUTA ←

AUXILIAR 2

23/03/20

P1 Pruebe lo siguiente :

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx .$$

≈ SOLUCIÓN ≈

1. Consideremos la función de 2 variables $f(x,y) = e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2} \cdot e^{-y^2}$ y tomemos los siguientes sub-conjuntos de $\mathbb{R}^2$ $B(0,R)$, $B(0,2R)$ y $C_R = [R,R] \times [R,R]$.

Notamos lo siguiente :

$$B(0,R) \subseteq C_R \subseteq B(0,2R)$$

por ende :

$$\iint_{B(0,R)} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy \;\; (1) \leq \iint_{C_R} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy \;\; (2) \leq \iint_{B(0,2R)} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy \;\; (3)$$

* NOTA : $e^{-x^2-y^2} > 0$ → SIEMPRE ← *

Ahora ocupamos el TEO del cambio de variabe !!

- **Teorema del cambio de variable** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto y $T : \Omega \to \mathbb{R}_N$ una función de clase C^1. Sea Dúna región abierta y acotada con $Adh(D') \subset \Omega$ y supongamos además que T es inyectiva en D' que la matriz $T'(u)$ es invertible para todo $u \in D'$ y que $D = T(D')$ es un abierto. Sea $f : \bar{D} \to \mathbb{R}$ una función continua. Se tiene entonces la validez de la igualdad*

$$\int_D f(x)dx = \int_{D'} f(T(u)\, |det(T'(u))|\, du$$

Vemos que lo mas util es ocupar coordenadas cilindricas,

→ COORDENADAS CILINDRICAS ←

$x = \rho \cos \theta$
$y = \rho \operatorname{sen} \theta$
$z = z$

Según el teorema de cambio de variable debemos encontrar la derivada del Jacobiano.

$$\text{Jacobiano} = \begin{bmatrix} dx/d\rho & dy/d\rho & dz/d\rho \\ dx/d\theta & dy/d\theta & dz/d\theta \\ dx/dz & dy/dz & dz/dz \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\rho \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora sacamos el determinante del **Jacobiano**

$$\Delta J = \left[\begin{array}{ccc|cc} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\rho\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta & 0 & -\rho\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

→ **ocupamos Sarrus**

$$\Delta J = \rho\cos^2\theta + 0 + 0 - (0 + 0 - \rho\operatorname{sen}^2\theta)$$

$$= \rho\cos^2\theta + \rho\operatorname{sen}^2\theta$$

$$= \rho\,(\underbrace{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}_{1})$$

$$= \rho.$$

* NOTAMOS que $\Delta J = \rho$ *

→ Ahora reemplazamos en nuestras integrales.

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2} \Rightarrow f(\rho,\theta) = e^{-\rho^2}$$

1. $$\int_0^R \int_0^{2\pi} \rho e^{-\rho^2}\, d\theta\, d\rho = I_1$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^R 2\pi \rho e^{-\rho^2} d\rho$$

Cambio de variable

$u = -\rho^2$

$\Rightarrow du = -2\rho\, d\rho$

$\Rightarrow \frac{-du}{2\rho} = d\rho$

$\Rightarrow$ Calculamos la primitiva

$$\int \cancel{\rho}\, e^{u} \frac{du}{-2\cancel{\rho}} = \frac{e^{u}}{-2} + c.$$

Ahora:

$$I_1 = \cancel{2}\pi \cdot \frac{e^{-\rho^2}}{-\cancel{2}} \Big|_0^R = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

Análogamente para 3 tenemos que

$$I_3 = \int_0^{2R} \int_0^{2\pi} \rho\, e^{-\rho^2} d\theta\, d\rho = \pi(1 - e^{-4R^2}).$$

Por otro lado notemos que $\iint_{CR} e^{-x^2-y^2} dx\,dy =$

$$\int_{-R}^{R} \int_{-R}^{R} e^{-x} \cdot e^{-y} dx\,dy.$$

$$\Rightarrow = \int_{-R}^{R} e^{-x} dx \cdot \int_{-R}^{R} e^{-y} \cdot dy$$ pero como

la variable es muda se obtiene que

$$\iint_{CR} e^{-x^2-y^2} dx\,dy = \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx \right)^2$$

Reemplazamos en la desigualdad:

$$\pi\left(1-e^{-R^2}\right) \leq \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\right)^2 \leq \pi\left(1-e^{-4R^2}\right)$$

Tomamos $R \longrightarrow \infty$

$$\lim_{R\to\infty} \pi\left(1-\underbrace{e^{-R^2}}_{0}\right) \leq \lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\right)^2 \leq \lim_{R\to\infty} \pi\left(1-\underbrace{e^{-4R^2}}_{0}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \pi \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\right)^2 \leq \pi$$

Por teorema del sandwich vemos que:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\right)^2 = \pi \qquad / \sqrt{}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$ $\rightarrow$ como e^{-x^2} es par

$$\Rightarrow 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}/2$$

//

P2. Calcule

$$I = \int_0^1 \int_z^1 \int_y^1 e^{x^3}\, dx dy dz$$

Hint: Use dos veces el teorema de Fubini, cambiando el orden de integración adecuadamente.

1_ Aplicamos Fubini a la integral:

$$\int_z^1 \int_y^1 e^{x^3}\, dx\, dy.$$

donde $z \in [0,1]$ fijo.

Entonces:

$$\int_z^1 \int_y^1 e^{x^3}\, dx\, dy = \int_z^1 \int_z^x e^{x^3}\, dy\, dx$$

$$= \int_z^1 (x-z) e^{x^3}\, dx.$$

Aplicamos Fubini una vez mas:

$$I = \int_0^1 \int_z^1 (x-z) e^{x^3}\, dx\, dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^x (x-z) e^{x^3}\, dz\, dx$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{2} (x-z)^2 \right) \Big|_{z=0}^{z=x} e^{x^3} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 e^{x^3} \, dx = \frac{1}{6} e^{x^3} \Big|_0^1$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{6} (e-1)$$

P3. Calcule el volumen de la elipsoide dado por:

$$E := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

recuerriendo para ello a un cambio de variable conveniente.

Consideremos el siguiente cambio de variable

$$T : [0,1] \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \to T \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\rho \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ b\rho \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ c\rho \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos el Jacobiano

$$J_T(\rho,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} a \operatorname{sen}\varphi\cos\theta & b\sin\varphi\sin\theta & c\cos\varphi \\ a\rho\cos\varphi\cos\theta & b\rho\cos\varphi\sin\theta & -c\rho\sin\varphi \\ -a\rho\sin\varphi\sin\theta & b\rho\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

y con esto calculamos el det

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a \operatorname{sen}\varphi\cos\theta & b\sin\varphi\sin\theta & c\cos\varphi & a\operatorname{sen}\varphi\cos\theta & b\sin\varphi\sin\theta \\ a\rho\cos\varphi\cos\theta & b\rho\cos\varphi\sin\theta & -c\rho\sin\varphi & a\rho\cos\varphi\cos\theta & b\rho\cos\varphi\sin\theta \\ -a\rho\sin\varphi\sin\theta & b\rho\sin\varphi\cos\theta & 0 & -a\rho\sin\varphi\sin\theta & b\rho\sin\varphi\cos\theta \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta J = abc\,\rho^2\sin^3\varphi\sin^2\theta + abc\,\rho^2\sin\varphi\cos^2\varphi\cdot\cos^2\theta$$

$$-\left(-abc\,\rho^2\sin^3\varphi\cos^2\theta - abc\,\rho^2\sin\rho\sin^2\theta\cos^2\rho\right)$$

$$= abc\,\rho^2\sin(\varphi)\left(\sin^2\varphi\sin^2\theta + \cos^2\varphi\cos^2\theta + \sin^2\varphi\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^2\varphi\right)$$

$$= abc\,\rho^2\sin(\varphi)\left(\sin^2\varphi\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) + \cos^2\varphi\left(\sin^2\theta + \cos^2\varphi\right)\right)$$

$$= abc\,\rho^2\sin(\varphi)\left(\underbrace{\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)}_{1}\underbrace{\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)}_{1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta J = abc\, \rho^2 \sin(\varphi)$$

Como ya sabemos :

$$E' = \{ (\rho, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 : \\ 0 \leq \rho \leq 1, \ 0 \leq \varphi \leq \pi, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \}$$

vemos que la transformación cumple las condiciones del TEO. DE CAMBIO DE VARIA-BLES (clase C^1, inyectiva y localmente invertible)

Tenemos que

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{1} abc\, \rho^2 \sin(\varphi)\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$= abc \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\rho^3}{3} \sin(\varphi) \right) \Big|_0^1 d\varphi\, d\theta$$

$$= \frac{abc}{3} \int_0^{2\pi} (-\cos(\varphi)) \Big|_0^{\pi} d\theta$$

$$= \frac{4\pi}{3} abc.$$

//