Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2002-1,3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Auxiliar 3

Repaso curvas
17 de abril de 2020

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Camilo Gomez, Javiera Palominos, Camilo Ramírez

Definición de curva
Una conjunto $\Gamma \subseteq R^n$ se dice CURVA si existe una función continua $\vec{r} : I = [a,b] \to \mathbb{R}$, llamada REPRESENTACIÓN PARAMÉTRICA de la curva, tal que:

$$\Gamma = \{\vec{r}(t) : t \in [a,b]\}$$

El conjunto de representaciones paramétricas de una misma curva forma una clase de equivalencia, donde cada elemento de la clase está relacionado con otro por una REPARAMETRIZACIÓN.

Definiciones de regularidad

(i) Una curva Γ se dice SUAVE si tiene una parametrización $\vec{r} : I \to \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{r}$ es continua y $\vec{r}\,'$ es uniformemente continua en I, es decir, $\vec{r} \in \mathcal{C}^1$.

(ii) Una curva Γ se dice REGULAR si es suave y $\forall t \in I, \vec{r}\,'(t) \neq \mathbf{0}$.

(iii) Una curva Γ se dice SIMPLE, si es suave y $\vec{r}$ es inyectiva.

(iv) Una curva Γ se dice CERRADA, si es suave y $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.

Regularidad (suavidad) por pedazos
Un camino suave (regular) POR PEDAZOS corresponde a uno de parametrización $\vec{r} : I \to \mathbb{R}^n$ continua, donde existe una partición de $I = [a,b]$ definida por $a = T_0 < T_1 < \cdots < T_n = b$ tal que $\vec{r}\,|_{[T_{i-1},T_i]} : [T_{i-1}, T_i] \to \mathbb{R}^n$ es suave (regular) para $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Largo de una curva
El largo de una curva Γ denotado como $L(\Gamma)$ corresponde a:

$$L(\Gamma) = \sup_{P \in \mathcal{P}} \sum_{i=1}^{m} \|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})\|$$

Donde se toma el supremo a partir del espacio de particiones $\mathcal{P}$ del intervalo $[a,b]$ de la forma $\{t_i\}_{i=1}^m \subseteq [a,b]$, en caso que la curva sea suave, la expresión se reduce a $\int_a^b \|\vec{r}\,'(t)\|\,\mathrm{d}t$, en caso que la curva sea suave por pedazos, la longitud corresponde a:

$$L(\Gamma) = \sum_{i=1}^{n} \int_{T_{i-1}}^{T_i} \left\|\vec{r}\,'(t)\right\| \mathrm{d}t$$

Parametrización en longitud de arco natural
Considerando una curva Γ parametrizada por la función $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ regular, su PARAMETRIZACION NATURAL se denotará por $\sigma : [0, L(\Gamma)] \to \mathbb{R}^n$, la cual corresponde a la obtenida por los siguientes pasos:

(1) Calcular la función de longitud de arco, correspondiente a $s(t) = \int_a^t \|\vec{r}\,'(u)\|\,\mathrm{d}u$.

(2) Despejar t en la relación anterior, estableciendo una relación $t = t(s)$.

(3) Reemplazar $t = t(s)$ en $\vec{r}(t)$, de donde se obtiene:

$$\sigma(s) = \vec{r}(t(s)), s \in [0, L(\Gamma)]$$

P1 Sea la parametrización $\vec{r}(t) = (a\cos(t), a\,\mathrm{sen}(t))$, con $t \in [0, 2\pi]$ y $|a| > 0$.

(a) Responda y muestre si la parametrización es suave, cerrada, simple o regular.

(b) Encuentre la parametrización en longitud de arco para esta curva.

P2 Sea Γ la curva parametrizada por:

$$\vec{g}(t) = (4\cos(t), 5 - 5\,\mathrm{sen}(t), -3\cos(t))$$

con $t \in [0, 2\pi]$

(a) Calcula la longitud de la curva y su parametrizacion por largo de arco.

(b) Calcule $\vec{T}(s)$ y $\vec{N}(s)$, conocidos como el vector tangente y el vector normal a la curva respectivamente.

P3 (a) Sea $\rho = f(\theta)$ la ecuación en coordenadas polares de una curva Γ. Demuestre que el largo de Γ en el intervalo $[\theta_1, \theta_2]$ es

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta$$

(b) Demuestre que para el caso en que se cumpla que $f'(\theta) = af(\theta)$, con $a \in \mathbb{R}$, la curvatura de Γ en cualquier θ está dada por

$$\kappa(\theta) = \frac{1}{\sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}}$$