FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Pauta Auxiliar 5 (Pregunta 1)

Teorema de Green

02 de mayo de 2020

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Camilo Gomez, Javiera Palominos, Camilo Ramírez

Pregunta 1 Considerando $\mathcal{D}$ como la región que delimita el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,-1)$ y $(0,3)$ y las funciones $P(x,y) = 2e^x e^y + x$ y $Q(x,y) = x^2 - 2ye^{-x}$, se pide calcular la integral:

$$\iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) \mathrm{d}A$$

Comenzando obteniendo las funciones que delimitan la curva que corresponderán a los límites de integración, se tiene que:

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1] \ \wedge \ y \in [-x, -4x+3]\}$$

Calculando ahora las derivadas parciales:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial (x^2 - 2ye^{-x})}{\partial x} = 2x + 2ye^{-x}\\ \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial (2e^x e^y + x)}{\partial y} = 2e^x e^y\end{aligned}$$

Finalmente, desarrollando la integral:

$$\begin{aligned}&\iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) \mathrm{d}A\\
&= \int_0^1 \int_{-x}^{-4x+3} 2x + 2ye^{-x} - 2e^x e^y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \left[2xy + y^2 e^{-x} - 2e^x e^y\right]_{y=-x}^{y=-4x+3} \mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 (2x(-4x+3) + (16x^2 - 24x + 9)e^{-x} - 2e^x e^{-4x+3}) - (-2x^2 + x^2 e^{-x} - 2e^x e^{-x})\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 -8x^2 + 6x + 16x^2 e^{-x} - 24xe^{-x} + 9e^{-x} - 2e^3 e^{-3x} + 2x^2 + x^2 e^{-x} + 2\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 -6x^2 + 6x + 2 + 15x^2 e^{-x} - 24xe^{-x} + 9e^{-x} - 2e^3 e^{-3x}\,\mathrm{d}x\\
&= \left[-2x^3 + 3x^2 + 2x - 15(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + 24(x+1)e^{-x} - 9e^{-x} + \frac{2e^3 e^{-3x}}{3}\right]_{x=0}^{x=1}\\
&= -2 + 3 + 2 - 75e^{-1} + 48e^{-1} - 9e^{-1} + \frac{2}{3} - \left(-0 + 0 + 0 - 30 + 24 - 9 + \frac{2e^3}{3}\right)\\
&= \frac{56}{3} - 36e^{-1} - \frac{2e^3}{3}\end{aligned}$$