Pauta Auxiliar 7 (Pregunta 1)

Superficies y Teorema de Stokes
27 de mayo de 2020

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Camilo Gomez, Javiera Palominos, Camilo Ramírez

Pregunta 1 Considerando la superficie:

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge z = 4 + x + y\}$$

Se pide calcular la integral:

$$\iint_{\mathcal{S}} x^2 z + y^2 z \, \mathrm{d}S$$

Para realizar el cálculo, primero es necesario encontrar una parametrización de $\mathcal{S}$, para esto es conveniente observar las restricciones que definen $\mathcal{S}$.

La primera restricción corresponde a $x^2 + y^2 \leq 4$, en el plano (2D) esto se entiende como un círculo de radio 2, pero dado que $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{R}^3$ esta región mas bien define un cilindro de radio 2 cuyo eje de simetría es $z = 0$ y se extiende en $z \in \mathbb{R}$, esta construcción sugiere utilizar coordenadas polares para x e y, es decir $x(\rho, \theta) = \rho \cos(\theta)$ e $y(\rho, \theta) = \rho \operatorname{sen}(\theta)$.

La segunda restricción corresponde a un plano, y por la forma en que está expresado sugiere directamente dejar z en función de x e y, que sumado al uso de polares, implica que se tienen las dependencias:

$$z(x, y) = z(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta)) = z(\rho, \theta)$$

Considerando lo dicho en los párrafos previos, se decide usar polares, en particular la coordenada z se expresa como:

$$z = 4 + x + y = 4 + \rho \cos(\theta) + \rho \operatorname{sen}(\theta) = 4 + \rho(\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta))$$

Así, la primera restricción determina que $\rho \in [0, 2]$ y $\theta \in [0, 2\pi]$, con esto se puede determinar el dominio de la parametrización σ, este es $[0, 2] \times [0, 2\pi] = \mathcal{D}$, de esta forma se arma la función que parametriza la superficie $\sigma : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$\sigma(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \rho \cos(\theta) \\ \rho \operatorname{sen}(\theta) \\ 4 + \rho(\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)) \end{pmatrix}$$

Las derivadas parciales de esta parametrización corresponden a:

$$\frac{\partial \sigma(\rho, \theta)}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) \\ \cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta) \end{pmatrix} \qquad ; \qquad \frac{\partial \sigma(\rho, \theta)}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\rho \operatorname{sen}(\theta) \\ \rho \cos(\theta) \\ \rho(\cos(\theta) - \operatorname{sen}(\theta)) \end{pmatrix}$$

A lo que el producto cruz corresponde a:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma(\rho,\theta)}{\partial \rho} \times \frac{\partial \sigma(\rho,\theta)}{\partial \theta} &= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta)+\operatorname{sen}(\theta) \\ -\rho\operatorname{sen}(\theta) & \rho\cos(\theta) & \rho(\cos(\theta)-\operatorname{sen}(\theta)) \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \rho\operatorname{sen}(\theta)(\cos(\theta)-\operatorname{sen}(\theta)) - \rho\cos(\theta)(\cos(\theta)+\operatorname{sen}(\theta)) \\ -(\rho\cos(\theta)(\cos(\theta)-\operatorname{sen}(\theta)) - (-\rho\operatorname{sen}(\theta)(\cos(\theta)+\operatorname{sen}(\theta))) \\ \rho\cos^2(\theta)+\rho\operatorname{sen}^2(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \rho\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) - \rho\operatorname{sen}^2(\theta) - \rho\cos^2(\theta) - \rho\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta) \\ -\rho\cos^2(\theta) + \rho\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) - \rho\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) - \rho\operatorname{sen}^2(\theta) \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \\ -\rho \\ \rho \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por lo que la norma del producto cruz corresponde a:

$$\left\| \frac{\partial \sigma(\rho,\theta)}{\partial \rho} \times \frac{\partial \sigma(\rho,\theta)}{\partial \theta} \right\| = \sqrt{(-\rho)^2+(-\rho)^2+\rho^2} = \sqrt{\rho^2+\rho^2+\rho^2} = \sqrt{3\rho^2} = \sqrt{3}\rho$$

Así, finalmente, es posible calcular la integral:

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} x^2 z + y^2 z \, \mathrm{d}S &= \iint_{\mathcal{D}} z(\rho,\theta)\left((x(\rho,\theta))^2 + (y(\rho,\theta))^2\right) \left\| \frac{\partial \sigma(\rho,\theta)}{\partial \rho} \times \frac{\partial \sigma(\rho,\theta)}{\partial \theta} \right\| \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\rho \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4+\rho(\cos(\theta)+\operatorname{sen}(\theta)))((\rho\cos(\theta))^2 + (\rho\operatorname{sen}(\theta))^2)\sqrt{3}\rho \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\rho \\
&= \sqrt{3}\int_0^2 \rho^3 \int_0^{2\pi} 4+\rho(\cos(\theta)+\operatorname{sen}(\theta)) \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\rho = \sqrt{3}\int_0^2 \rho^3 \left[4\theta + \rho(\operatorname{sen}(\theta)-\cos(\theta))\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \mathrm{d}\rho \\
&= \sqrt{3}\int_0^2 \rho^3(8\pi + \rho(0-1) - (\rho(0-1))) \, \mathrm{d}\rho = 8\pi\sqrt{3}\int_0^2 \rho^3 \, \mathrm{d}\rho = 8\pi\sqrt{3}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{\rho=0}^{\rho=2} = 8\pi\sqrt{3}\cdot\frac{16}{4} \\
&= 32\pi\sqrt{3}
\end{aligned}$$