MA3701 - Optimización

Auxiliar 4 - Geometría y Símplex

Profesor: Vicente Acuña
Auxiliares: Matías Muñoz y Diego Reyes

P1. Geometría

a) Considere un poliedro P y suponga que para cada variable x_i se tiene ya sea la restricción $x_i \geq 0$ o la restricción $x_i \leq 0$[1]. ¿Es cierto que P tiene por lo menos una solución básica factible?

b) Sean P y Q poliedros en $\mathbb{R}^n$. Definimos $P + Q = \{x + y | x \in P, y \in Q\}$.

- Muestre que cada punto extremo de $P+Q$ es la suma de un punto extremo de P y un punto extremo de Q.

c) Considere la elipsoide $E = \{x \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1\}$, donde cada $a_i > 0$. Demuestre que la elipsoide es convexa a través del siguiente argumento alternativo:

- Muestre que el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \leq b\}$, donde $f(x)$ es convexa, es un conjunto convexo.
- Muestre que la función que define a la elipsoide E es convexa.
- Concluya.

P2. Símplex + Geometría

Considere el problema de optimización lineal

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 \geq -1 \\ & x_1 - x_2 \leq -1 \\ & x_1 - 2x_2 \geq -4 \end{array}$$

1. Grafique el problema e indique la solución óptima.
2. Escriba el problema en formulación estándar. ¿Es el punto asociado a $(x_1, x_2) = (0, 1)$ en el problema de formulación estándar una solución básica factible? Justifique.
3. **SPOILER**: $(x_1, x_2) = (0, 1)$ es SBF. Encuentre una dirección a una SBF adyacente que tenga costo reducido negativo (¿por qué queremos movernos de punto?).
4. Haga una iteración de simplex. Muestre que el nuevo punto es una SBF. Comente si el punto es degenerado o no.

[1] Esto no quiere decir que no haya más restricciones en P.

Geometría

Def: Un conjunto $P \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice *poliedro* si se puede escribir de la forma $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$, donde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^m$.
Def: Un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice *convexo* si $\forall x, y \in C$ y $\forall \lambda \in [0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$.
Def: Sea C un conjunto convexo. Un punto $x \in C$ se dice *punto extremo* si no existen dos puntos distintos $y, z \in C$ tales que $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ para algún $\lambda \in (0,1)$.
Def: Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro. Un punto $x \in P$ se dice *vértice* si existe $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $c^t x < c^t y$ para todo $y \in P \setminus \{x\}$.
Def: Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ se dice *solución básica* si corresponde a la intersección de n restricciones linealmente independientes. Si además $x \in P$ (es decir, si satisface todas las restricciones), se dice que x es una *solución básica factible*.
Teo: Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro. Entonces, para $x \in P$ se tiene que:

$$x \text{ es un punto extremo } \Leftrightarrow x \text{ es un vértice } \Leftrightarrow x \text{ es una solución básica factible}$$

Def: Se dice que un poliedro P está en forma estándar si es de la forma $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$, con $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ cuyas filas son linealmente independientes, y $b \in \mathbb{R}^m$.
Teo: Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ un poliedro en forma estándar. Un vector $x \in \mathbb{R}^n$ es una solución básica de P si y sólo si $Ax = b$ y existen índices $B(1), \ldots, B(m)$ tales que:

- Las columnas $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$ son linealmente independientes.
- $x_i = 0$ para $i \notin \{B(1), \ldots, B(m)\}$.

Def: Una solución básica $x \in \mathbb{R}^n$ se dice *degenerada* si existen más de n restricciones l.i. que se activan en x. Para un poliedro en forma estándar, esta definición se traduce en que más de $n - m$ componentes de x sean nulas.
Def: Dado un conjunto finito $X = \{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$, se define su envoltura convexa como

$$conv(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0 \right\}.$$

Algoritmo Símplex

Dados $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de rango m, $b \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}^n$, el algoritmo símplex resuelve el problema

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & c^t x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

1. **Inicialización:**
   Encontrar una base factible B, cuyas columnas denotaremos por $A_{B(1)}, \dots, A_{B(m)}$.
   Definir índices básicos y no básicos: $\mathcal{B} := \{B(1), \dots, B(m)\}$, $\quad \mathcal{N} := \{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{B}$.
   Calcular B^{-1}, $\quad x_B := B^{-1}b$, $\quad z := c_B^t x_B$.

2. **Test de optimalidad:**
   Calcular los multiplicadores símplex: $p^t := c_B^t B^{-1}$.
   Calcular los costos reducidos: $\bar{c}_j := c_j - p^t A_j \ \forall j \in \mathcal{N}$.
   Si $\forall\, j \in \mathcal{N}$, $\bar{c}_j \geq 0$, terminar (estamos en el óptimo).
   Si no, sea $j \in \mathcal{N}$ tal que $\bar{c}_j < 0$.

3. **Test de factibilidad:**
   Calcular $u := B^{-1}A_j$.
   Calcular $\mathcal{I} := \{i \in \{1, \dots, m\} \mid u_i > 0\}$.
   Si $\mathcal{I} = \emptyset$, terminar (el problema es no acotado).
   Si no, calcular $\theta^* := \min\limits_{i\in\mathcal{I}} \frac{x_{B(i)}}{u_i}$ y $\ell \in \mathcal{I}$ tal que $\theta^* = \frac{x_{B(\ell)}}{u_\ell}$.

4. **Actualizar:**
   Formar una nueva base B reemplazando $A_{B(\ell)}$ por A_j en la base anterior.
   $\mathcal{B} := \mathcal{B} \setminus \{B(\ell)\} \cup \{j\}$, $\quad \mathcal{N} := \mathcal{N} \setminus \{j\} \cup \{B(\ell)\}$
   Decimos que x_j entra a la base y $x_{B(\ell)}$ sale de ella.
   $x_j := \theta^*$, $\quad x_{B(i)} := x_{B(i)} - \theta^* u_i$ para $i \neq \ell$.
   $z := z + \theta^* \bar{c}_j$.
   Calcular $B^{-1}(*)$.
   Ir a 2.