MA3701 - Optimización

Auxiliar 4 - Geometría y Símplex

Profesor: Vicente Acuña
Auxiliares: Matías Muñoz y Diego Reyes

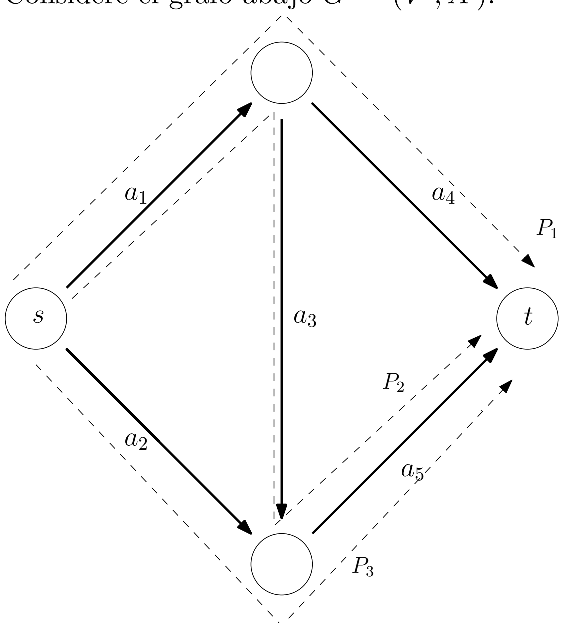
P1. Geometría

P1.Examen 2019-1, Dualidad

Considere el problema de flujo maximo. Dado un grafo dirigido $G = (V, A)$ con dos nodos $s, t \in V$ distintos, y una capacidad $u_a \geq 0$ para cada arco $a \in A$. El objetivo es de encontrar el valor F maximo tal que se puede mandar F unidades de flujo de s a t tal que para cada arco $a \in A$ uno manda a lo maximo u_a unidades de flujo. Consideramos la formulacion abajo por flujo maximo tal que $\mathcal{P}$ es el conjunto de todos los caminos (dirigidos) de s a t en G.

$$\begin{array}{llll} \max & \sum_{P\in\mathcal{P}} y_P & & \\ \text{s.a.} & \sum_{P\in\mathcal{P}:a\in P} y_P & \leq u_a & \forall a \in A \\ & y_P & \geq 0 & \forall P \in \mathcal{P} \end{array} \tag{1}$$

1. Considere el grafo abajo $G' = (V', A')$.



Asuma que las capacidades de las aristas son $u_{a_1} = 10$, $u_{a_2} = 3$, $u_{a_3} = 5$, $u_{a_4} = 7$, y $u_{a_5} = 9$. El programa que corresponde a esta instancia de flujo maximo es el siguente.

$$\begin{array}{lllll} \max & y_{P_1} & +y_{P_2} & +y_{P_3} & \\ \text{s.a.} & y_{P_1} & +y_{P_2} & & \leq 10 \\ & y_{P_1} & & & \leq 7 \\ & & y_{P_2} & & \leq 5 \\ & & & y_{P_3} & \leq 3 \\ & & y_{P_2} & +y_{P_3} & \leq 9 \\ & y_{P_1} & & & \geq 0 \\ & & y_{P_2} & & \geq 0 \\ & & & y_{P_3} & \geq 0 \end{array}$$

Encuentre el programa dual. *Hint: Recuerde que puede usar la tabla que vimos en clases en ambas direcciones.*

2. Encuentre las soluciones óptimas del programa primal y del programa dual del parte 1 (puede ser a través de inspeción). Demuestre usando dualidad que tus soluciones son óptimas.

3. Encuentre el problema dual del problema (1)

4. Escriba el precio sombra para cada arísta $a \in A'$. Use el concepto de precios sombras para argumentar que algunas arístas $a \in A'$ tienen la propiedad que si uno aumenta su capacidad u_a a $u_a + \epsilon$ para un $\epsilon > 0$ pequeño, entonces se puede mandar ϵ unidades de flujo adicional de s a t. ¿Cuáles son estas arístas y por qué?

Geometría

Def: Un conjunto $P \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice *poliedro* si se puede escribir de la forma $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$, donde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^m$.
Def: Un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice *convexo* si $\forall x, y \in C$ y $\forall \lambda \in [0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$.
Def: Sea C un conjunto convexo. Un punto $x \in C$ se dice *punto extremo* si no existen dos puntos distintos $y, z \in C$ tales que $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ para algún $\lambda \in (0,1)$.
Def: Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro. Un punto $x \in P$ se dice *vértice* si existe $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $c^t x < c^t y$ para todo $y \in P \setminus \{x\}$.
Def: Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ se dice *solución básica* si corresponde a la intersección de n restricciones linealmente independientes. Si además $x \in P$ (es decir, si satisface todas las restricciones), se dice que x es una *solución básica factible*.
Teo: Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro. Entonces, para $x \in P$ se tiene que:

$$x \text{ es un punto extremo } \Leftrightarrow x \text{ es un vértice } \Leftrightarrow x \text{ es una solución básica factible}$$

Def: Se dice que un poliedro P está en forma estándar si es de la forma $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$, con $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ cuyas filas son linealmente independientes, y $b \in \mathbb{R}^m$.
Teo: Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ un poliedro en forma estándar. Un vector $x \in \mathbb{R}^n$ es una solución básica de P si y sólo si $Ax = b$ y existen índices $B(1), \ldots, B(m)$ tales que:

- Las columnas $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$ son linealmente independientes.
- $x_i = 0$ para $i \notin \{B(1), \ldots, B(m)\}$.

Def: Una solución básica $x \in \mathbb{R}^n$ se dice *degenerada* si existen más de n restricciones l.i. que se activan en x. Para un poliedro en forma estándar, esta definición se traduce en que más de $n - m$ componentes de x sean nulas.
Def: Dado un conjunto finito $X = \{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$, se define su envoltura convexa como

$$conv(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0 \right\}.$$

Algoritmo Símplex

Dados $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de rango m, $b \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}^n$, el algoritmo símplex resuelve el problema

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & c^t x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

1. **Inicialización:**
   Encontrar una base factible B, cuyas columnas denotaremos por $A_{B(1)}, \dots, A_{B(m)}$.
   Definir índices básicos y no básicos: $\mathcal{B} := \{B(1), \dots, B(m)\}, \quad \mathcal{N} := \{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{B}$.
   Calcular $B^{-1}, \quad x_B := B^{-1}b, \quad z := c_B^t x_B$.

2. **Test de optimalidad:**
   Calcular los multiplicadores símplex: $p^t := c_B^t B^{-1}$.
   Calcular los costos reducidos: $\bar{c}_j := c_j - p^t A_j \ \forall j \in \mathcal{N}$.
   Si $\forall\, j \in \mathcal{N},\ \bar{c}_j \geq 0$, terminar (estamos en el óptimo).
   Si no, sea $j \in \mathcal{N}$ tal que $\bar{c}_j < 0$.

3. **Test de factibilidad:**
   Calcular $u := B^{-1}A_j$.
   Calcular $\mathcal{I} := \{i \in \{1, \dots, m\} \mid u_i > 0\}$.
   Si $\mathcal{I} = \emptyset$, terminar (el problema es no acotado).
   Si no, calcular $\theta^* := \min\limits_{i\in\mathcal{I}} \frac{x_{B(i)}}{u_i}$ y $\ell \in \mathcal{I}$ tal que $\theta^* = \frac{x_{B(\ell)}}{u_\ell}$.

4. **Actualizar:**
   Formar una nueva base B reemplazando $A_{B(\ell)}$ por A_j en la base anterior.
   $\mathcal{B} := \mathcal{B} \setminus \{B(\ell)\} \cup \{j\}, \quad \mathcal{N} := \mathcal{N} \setminus \{j\} \cup \{B(\ell)\}$
   Decimos que x_j entra a la base y $x_{B(\ell)}$ sale de ella.
   $x_j := \theta^*, \quad x_{B(i)} := x_{B(i)} - \theta^* u_i$ para $i \neq \ell$.
   $z := z + \theta^* \bar{c}_j$.
   Calcular $B^{-1}(*)$.
   Ir a 2.

1. Relación entre las variables y restricciones del problema Primal y Dual :

PRIMAL	Minimizar	Maximizar	DUAL
Restricciones	$\geq b_i$ $\leq b_i$ $= b_i$	≥ 0 ≤ 0 Irrestricto	Variables
Variables	≥ 0 ≤ 0 Irrestricto	$\leq c_j$ $\geq c_j$ $= c_j$	Restricciones

Nota: Si se parte con un problema de maximización se puede convertir a uno de minimización equivalente y luego formar su Dual de acuerdo a las reglas descritas en la tabla.

2. Las diferente posibilidades para el problema Primal y Dual:

	Óptimo Finito	**No Acotado**	**Infactible**
Óptimo Finito	Posible	Imposible	Imposible
No Acotado	Imposible	Imposible	Posible
Infactible	Imposible	Posible	Posible

3. **Teorema de Dualidad Débil :** Si x es una solución factible del problema primal y p es una solución factible del problema dual, entonces
$$p^\intercal b \leq c^\intercal x$$

4. **Teorema de Dualidad Fuerte :** Si un problema de programación lineal tiene solución óptima, el Dual también tiene, y los respectivos costos óptimos son iguales.

5. **Teorema de Holgura Complementaria :** Sea x y p soluciones factibles del problema primal y dual respectivamente. Los vectores x y p son soluciones óptimas para los dos respectivos problemas si solo si:
$$p_i(a_i^\intercal x - b_i) = 0, \quad \forall i,$$
$$(c_j - p^\intercal A_j)x_j = 0, \quad \forall j.$$