



Ingeniería Civil  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE



# CI7401 – Dinámica de Suelos

## Clase 2

### Elasticidad

**Felipe Ochoa-Cornejo, Ph.D.**

**Septiembre 2020**

# IMPORTANTE

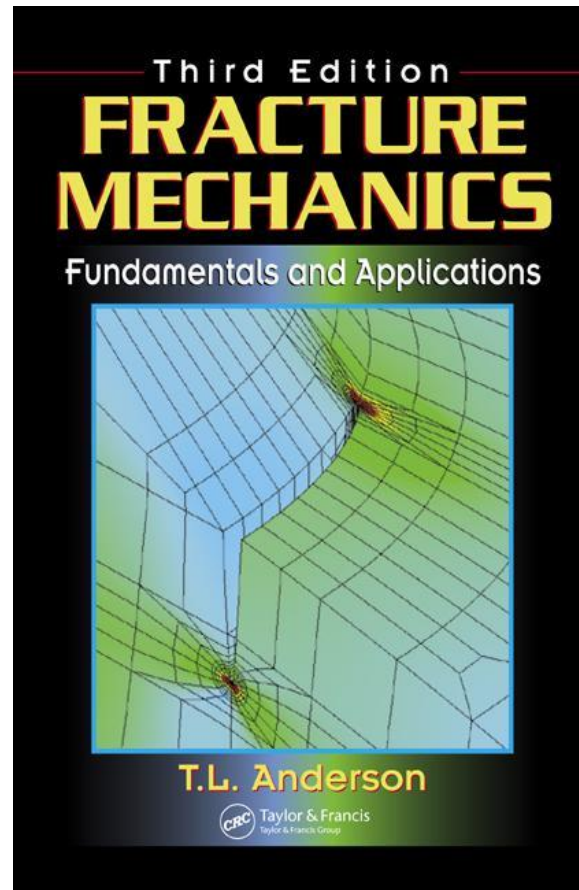
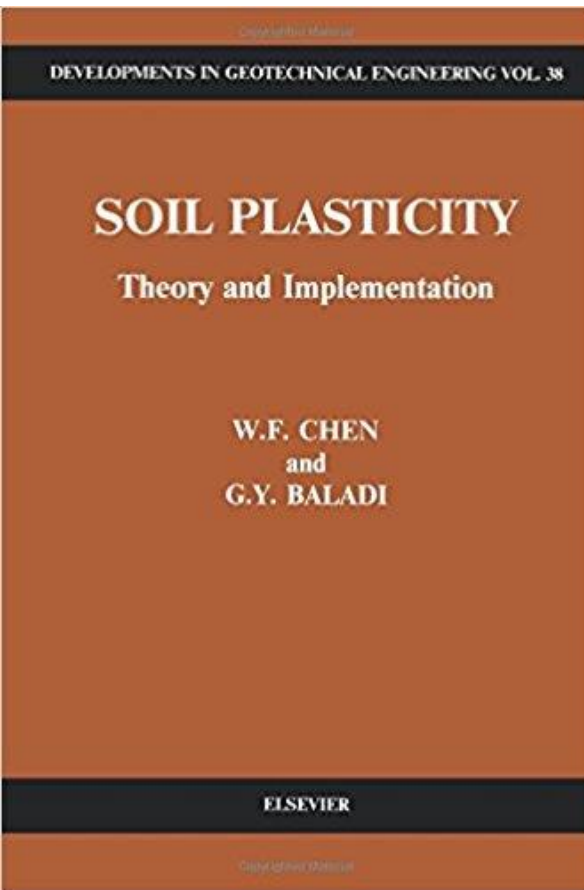
Las diapositivas que se muestran en este curso han sido confeccionadas con imágenes, contenido, y videos, los cuales han sido creados, modificados, o buscados por el autor de estas clases, y referenciados según corresponda. Sugerencias sobre este aspecto siempre son bienvenidos, en pos de la mejora continua del material académico presentado.

# Contenido

- Elasticidad de un Material
- Elasticidad Lineal
- Conceptos Fundamentales
- Análisis de Tensiones
- Análisis de Deformaciones
- Elasticidad en Coordenadas Polares
- Esfuerzos Geostáticos

En caso de encontrar errores u omisiones,  
por favor informar a fochoa@ing.uchile.cl

# Bibliografía



J.F. Beltrán  
U. De Chile  
Apuntes Mecanica de Solidos 2

En caso de encontrar errores u omisiones,  
por favor informar a fochoa@ing.uchile.cl

# Contenido

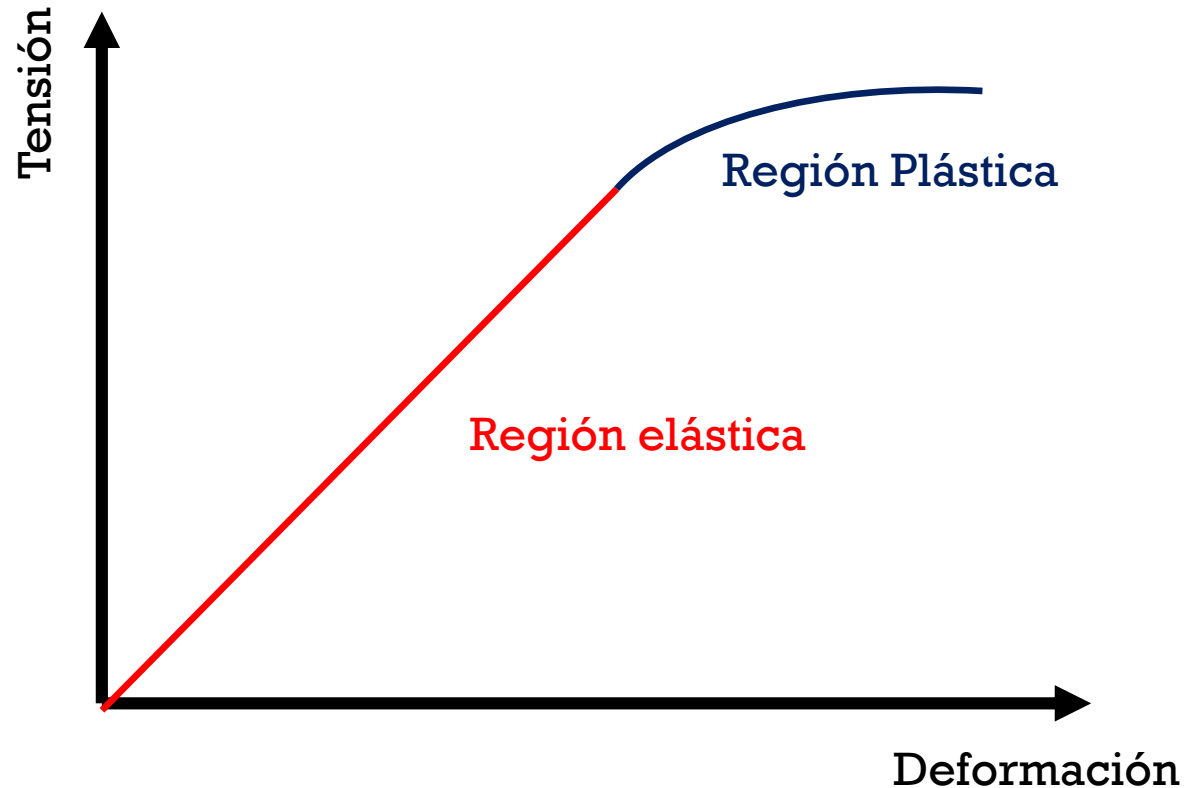
- **Elasticidad de un Material**
- Elasticidad Lineal
- Conceptos Fundamentales
- Análisis de Tensiones
- Análisis de Deformaciones
- Elasticidad en Coordenadas Polares
- Esfuerzos Geostáticos

En caso de encontrar errores u omisiones,  
por favor informar a fochoa@ing.uchile.cl

# Elasticidad

- Propiedad de los materiales.
- Caracteriza los cambios ante una fuerza externa.
- Cambios desaparecen al desaparecer la fuerza.

# Relación tensión-deformación



# Contenido

- Elasticidad de un Material
- **Elasticidad Lineal**
- Conceptos Fundamentales
- Análisis de Tensiones
- Análisis de Deformaciones
- Elasticidad en Coordenadas Polares
- Esfuerzos Geostáticos

En caso de encontrar errores u omisiones,  
por favor informar a fochoa@ing.uchile.cl

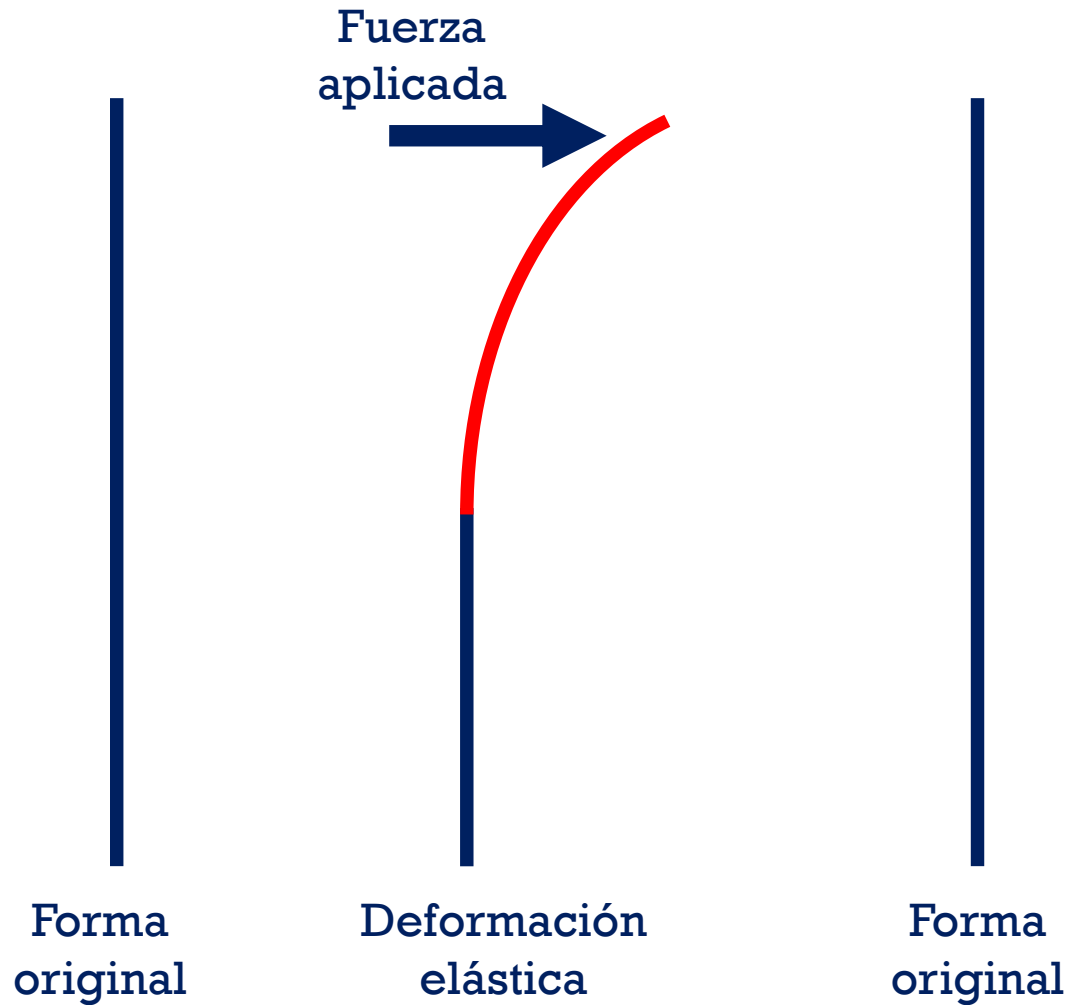


# Elasticidad Lineal

Modelo simplificado que considera que un material es:

- **Continuo**  
Distribución de masa continua
- **Homogéneo**  
Propiedades no varían de un punto a otro
- **Isótropo**  
Propiedades no cambian con la dirección
- **Lineal**  
Si aumenta la carga aumenta la deformación proporcionalmente
- **Elástico**  
Al retirar las cargas desaparecen las deformaciones

# Elasticidad Lineal



# Contenido

- Elasticidad de un Material
- Elasticidad Lineal
- **Conceptos Fundamentales**
- Análisis de Tensiones
- Análisis de Deformaciones
- Elasticidad en Coordenadas Polares
- Esfuerzos Geostáticos

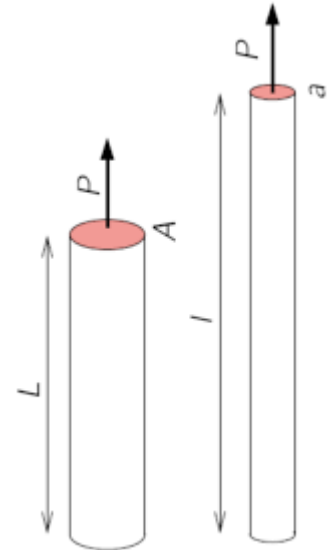
# Conceptos Iniciales

- Deformación de un elemento  
Cambio de longitud por una carga externa

$$u_{xx} = L_{final} - L_{inicial}$$

- Deformación Unitaria  
Deformación normalizada por largo inicial

$$\varepsilon_{xx} = \frac{L_{final} - L_{inicial}}{L_{inicial}} = \frac{u_{xx}}{L_{inicial}}$$



# Conceptos Iniciales

- Tensión

Fuerza aplicada en un área específica.

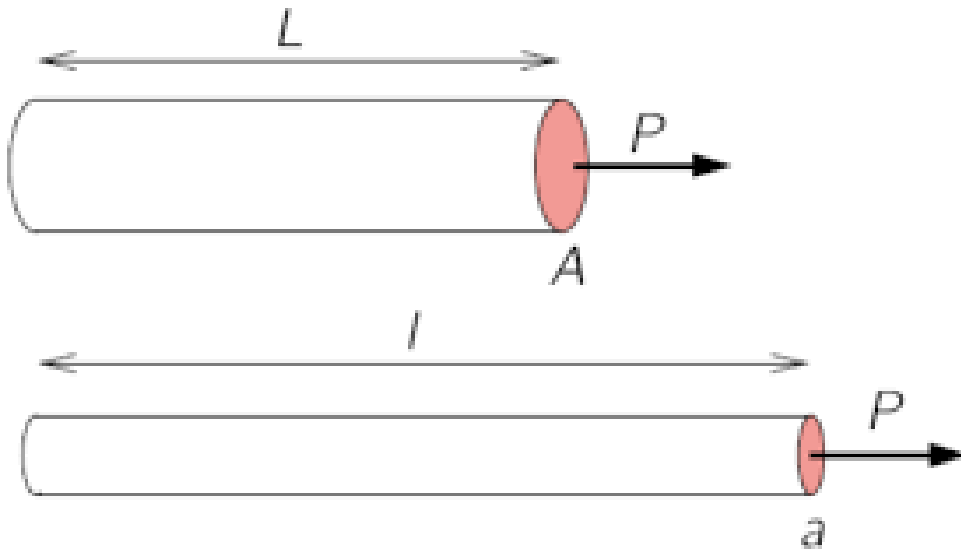
$$\sigma_{xx} = \frac{F_{xx}}{A}$$

- Modulo de Elasticidad, o de Young

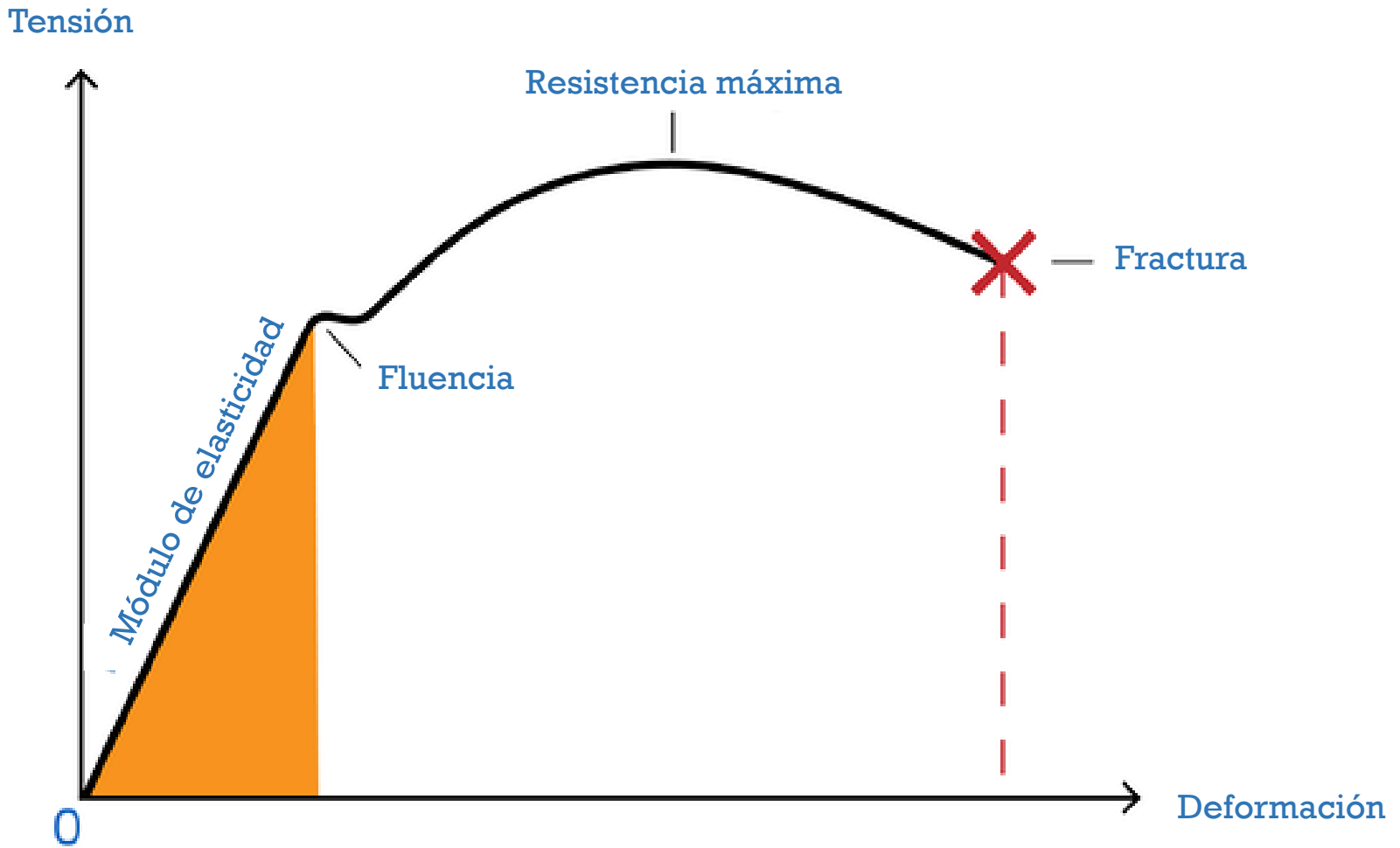
Pendiente de porción lineal de curva tensión-deformación

$$E = \frac{\sigma_{xx}}{\epsilon_{xx}}$$

# Tensión Normal



$$\sigma = \frac{P}{A}$$

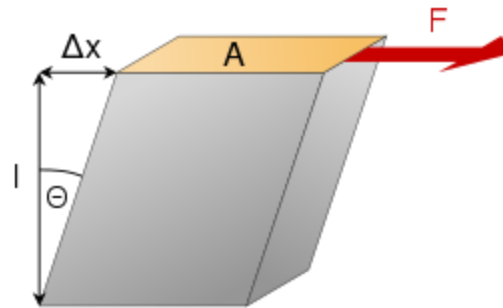


En caso de encontrar errores u omisiones,  
por favor informar a fochoa@ing.uchile.cl

# Esfuerzo de Corte y Deformación

El corte induce cambios de forma. Se denota como  $\tau$

- Formulación equivalente a la de tensión normal
- Mismas unidades que la tensión normal
- Actúa paralela a la cara del cuerpo solicitado

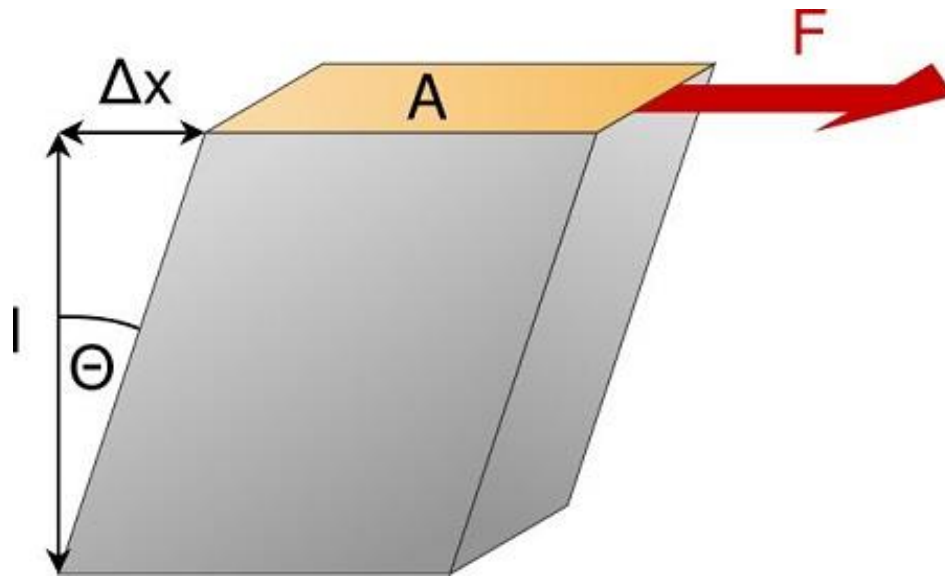


En caso de encontrar errores u omisiones,  
por favor informar a fochoa@ing.uchile.cl



# Deformación por Corte

Es el ángulo de distorsión, según plano desplazado



**Sea el esfuerzo de tensión o corte, en elasticidad la deformación producida y el esfuerzo aplicado son proporcionales, y por lo tanto**

**Tensión = Constante · Deformación**

# Relaciones Esfuerzo-Deformación

## Ley de Hooke

Tensión axial

$$\sigma = \mathbf{E}\varepsilon$$



Modulo de Elasticidad

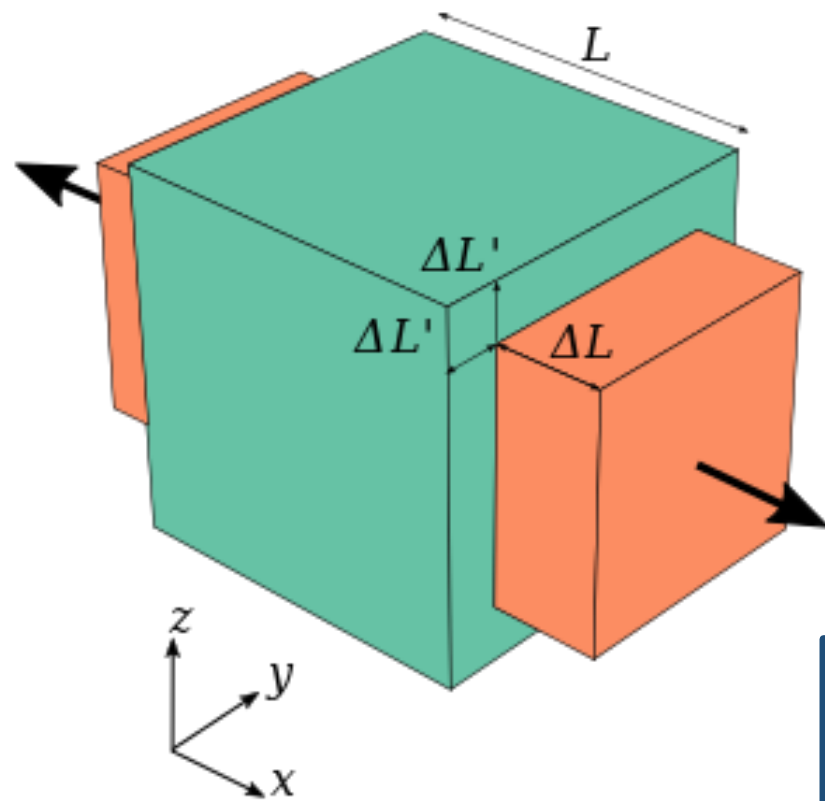
Tensión corte

$$\tau = \mathbf{G}\gamma$$



Modulo de Corte

# Coeficiente de Poisson



$$\nu = -\frac{\epsilon_x}{\epsilon_z} = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_z} = -\frac{\epsilon_{transversal}}{\epsilon_{longitudinal}}$$

Según estado tensional permite caracterizar la anisotropía de un material

# Coeficiente de Poisson

- $\nu$  suele estar entre 0,2 y 0,3 en suelos
- $\nu$  suele estar entre 0,25 y 0,35 en metales
- El máximo valor de  $\nu$  es 0,5
- Asume volumen constante

# Coeficiente de Poisson y Módulos

$$E = 2G(1 + \nu)$$

# Ley de Hooke Generalizada

En particular, cuando un cuerpo sometido a un estado tensión, la ley de Hooke se generaliza:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

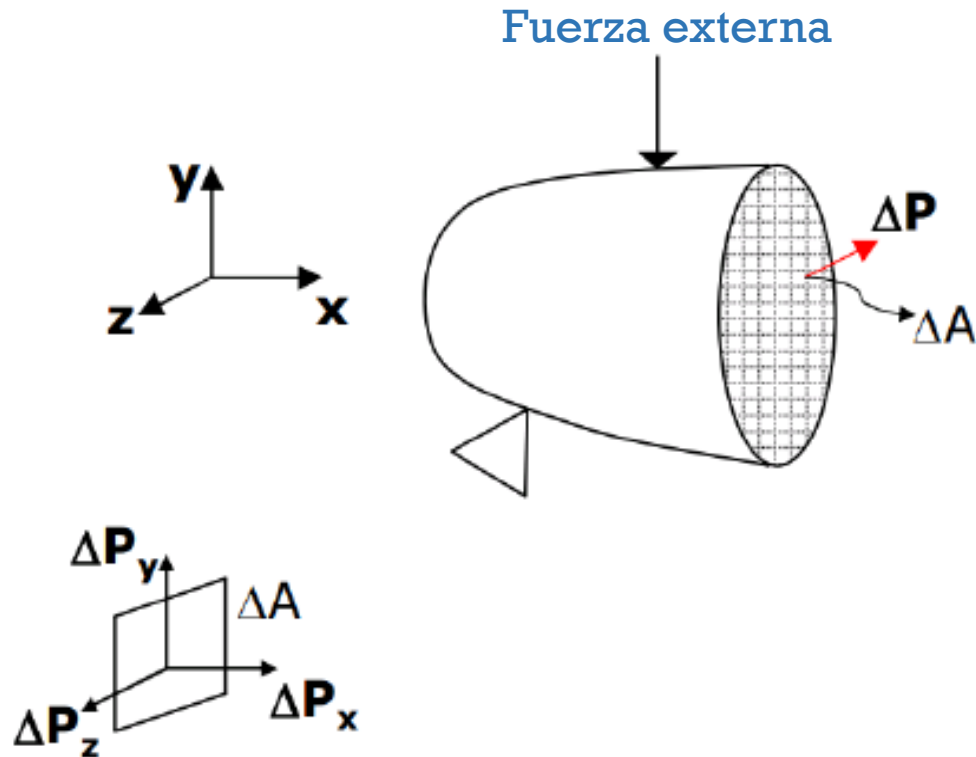
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

# Contenido

- Elasticidad de un Material
- Elasticidad Lineal
- Conceptos Fundamentales
- **Análisis de Tensiones**
- Análisis de Deformaciones
- Elasticidad en Coordenadas Polares
- Esfuerzos Geostáticos



# Análisis de tensiones en un sólido



Beltrán (2015)

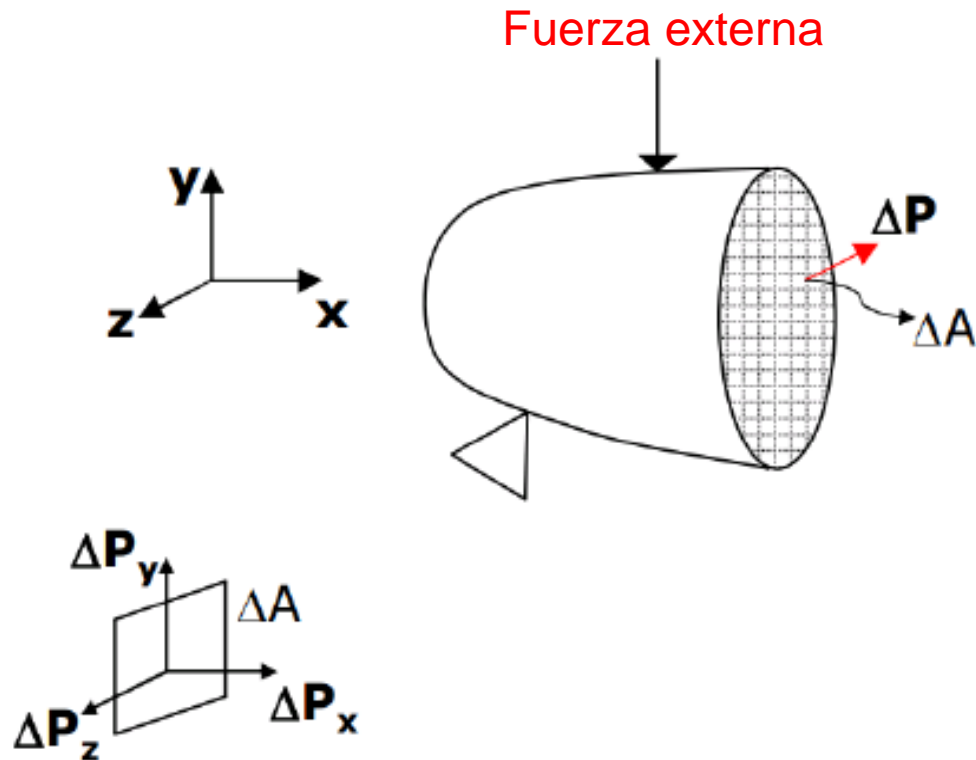
# Estrategia para el Análisis de Tensiones

- Un sólido sometido a fuerzas externas se corta por un plano imaginario.
- El equilibrio requiere fuerzas internas en el plano de corte.
- La fuerza  $\Delta P$  es la reacción interna.

$$\sigma_{xx} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta A} ; \sigma_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_y}{\Delta A} ; \sigma_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_z}{\Delta A}$$

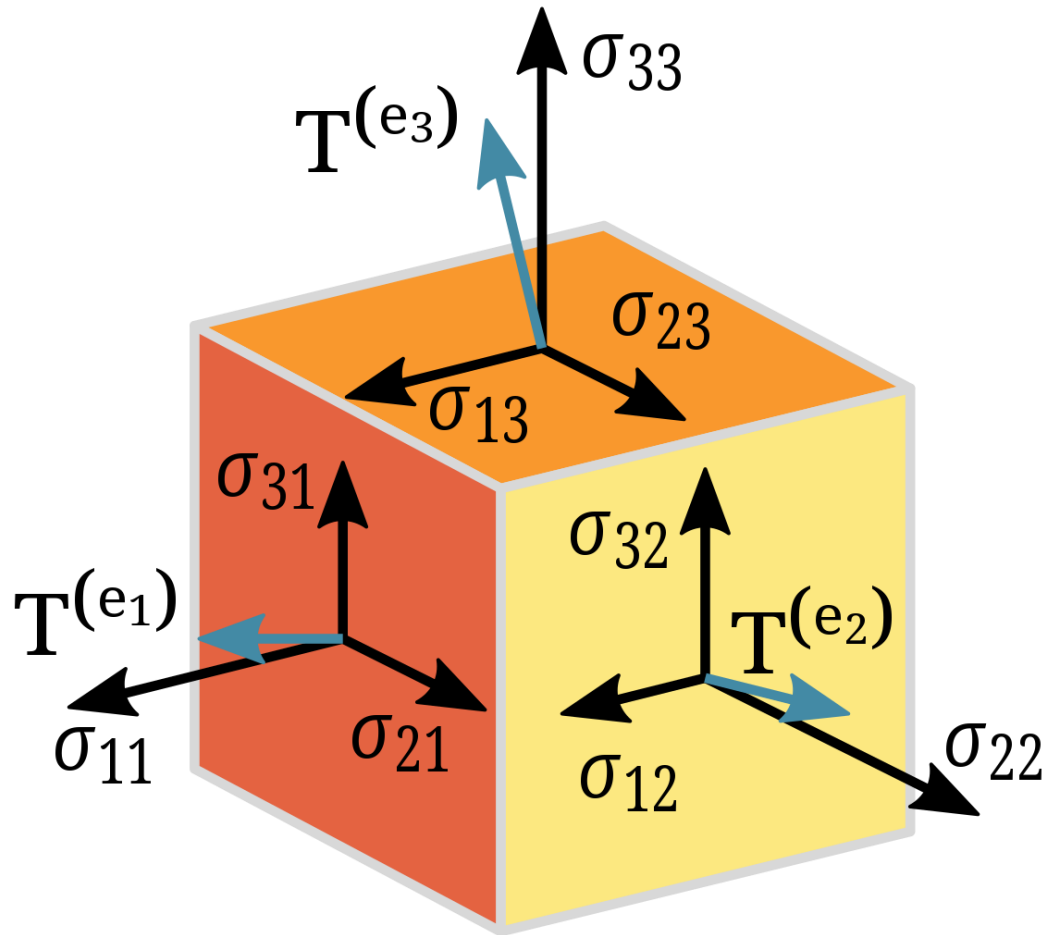
- El primer índice se asocia al plano normal a la sección expuesta.
- El segundo índice representa la dirección en donde actúa la tensión.

# Análisis de tensiones en un sólido



Beltrán (2015)

# Análisis de Tensiones

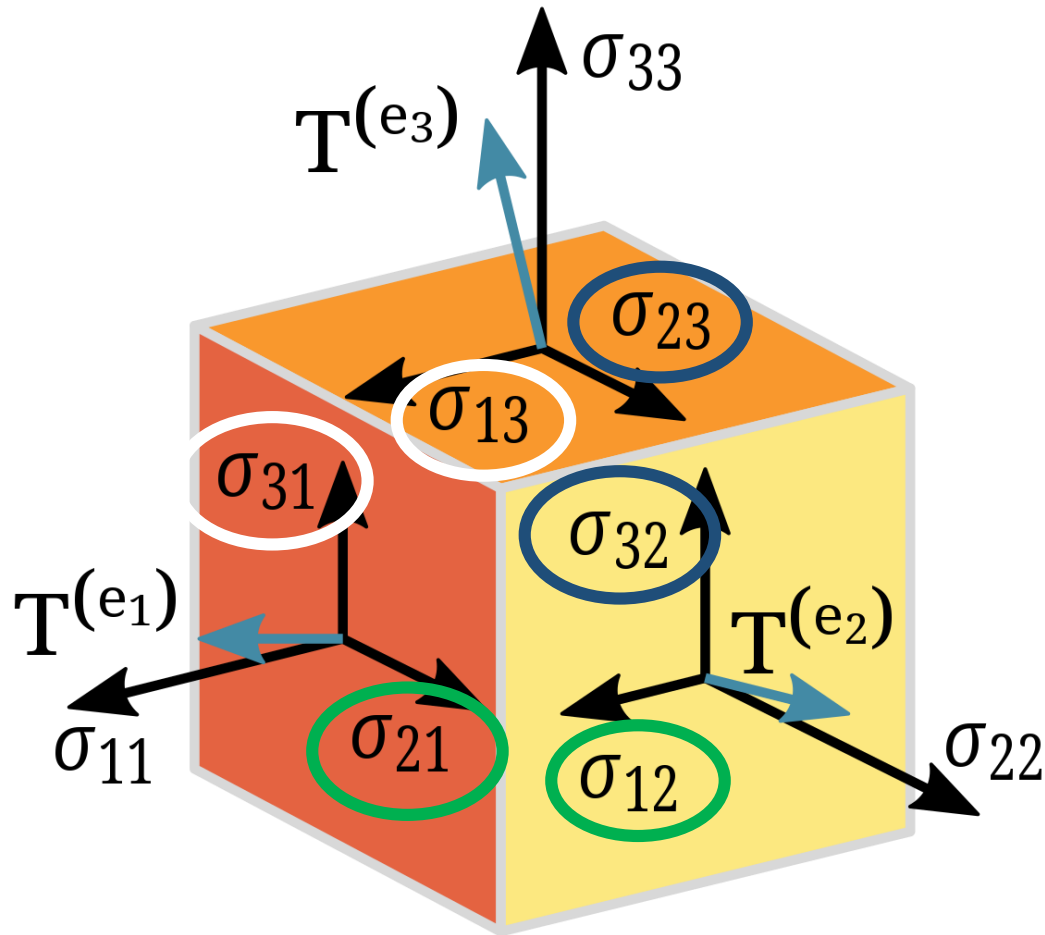


En caso de encontrar errores u omisiones,  
por favor informar a fochoa@ing.uchile.cl

# Análisis de Tensiones

- Tensiones perpendiculares al plano son **tensiones normales**
- Tensiones paralelas y sobre el plano son **tensiones de corte**
- Equilibrio implica:
  - ✓ Tres tensiones normales
  - ✓ Seis paralelas en plano de corte.

# Análisis de Tensiones



En caso de encontrar errores u omisiones,  
por favor informar a fochoa@ing.uchile.cl

# Tensor de Tensiones

- Es una representación matricial de las tensiones.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

- Para mantener el **equilibrio de momento**  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

# Transformación de Tensiones a Otras Direcciones

- Obtener tensiones en planos arbitrarios.

- Estado plano de tensiones.

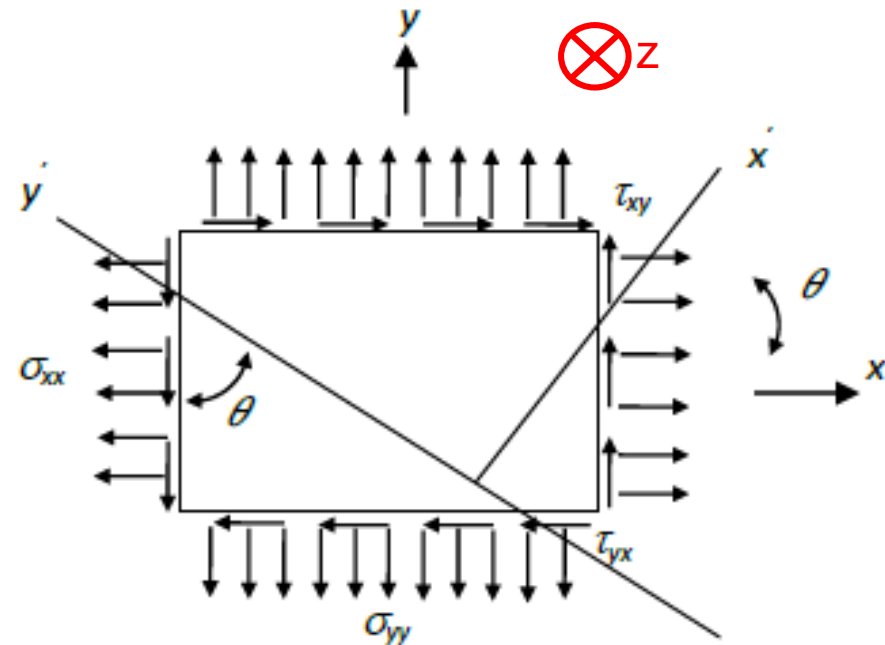
$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\sigma_{zz} = 0$$

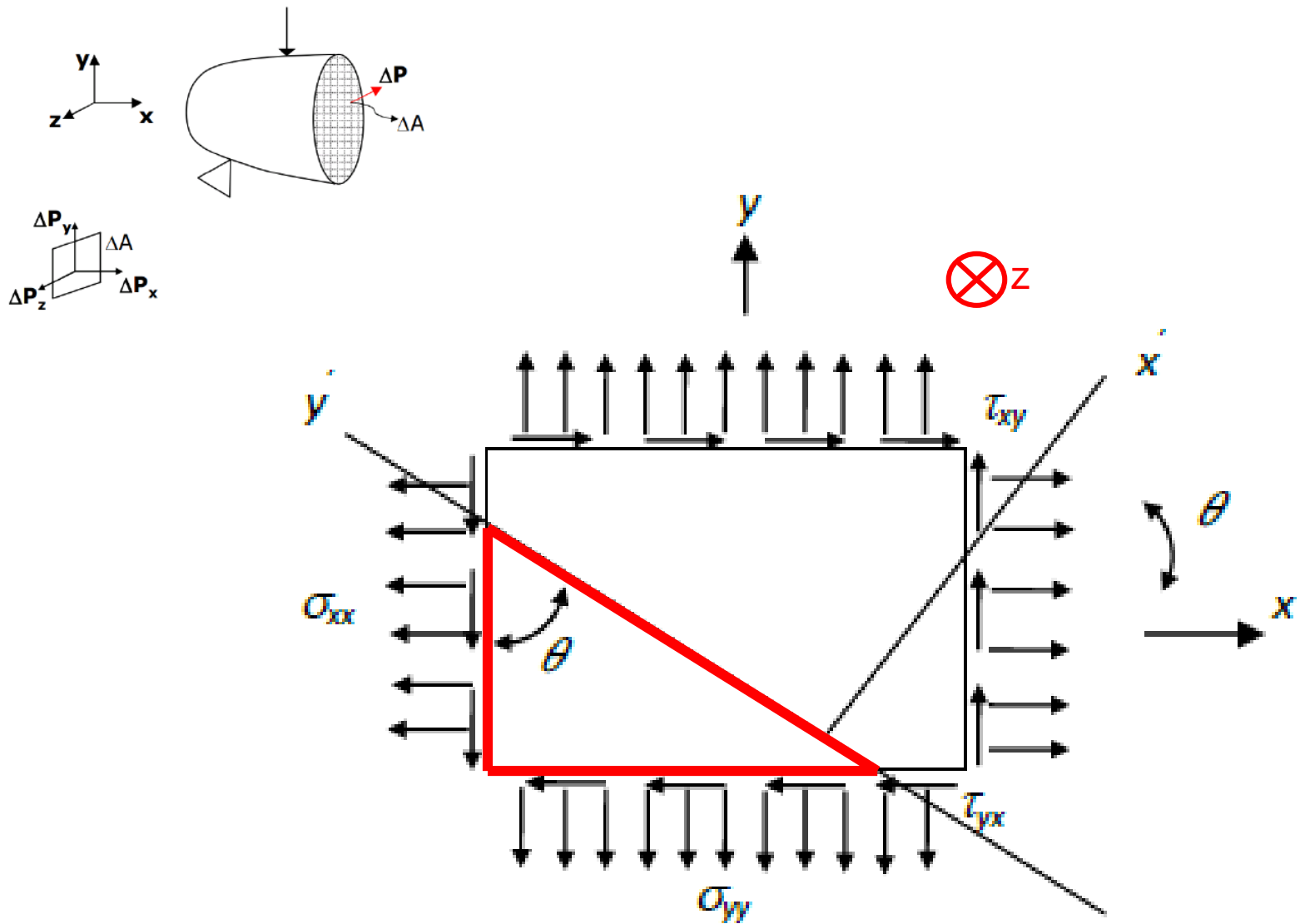
- Longitud unitaria en la dirección z.

- Equilibrio de momento

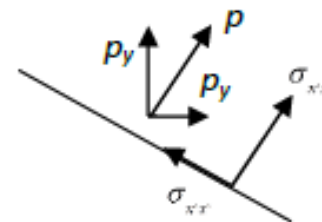
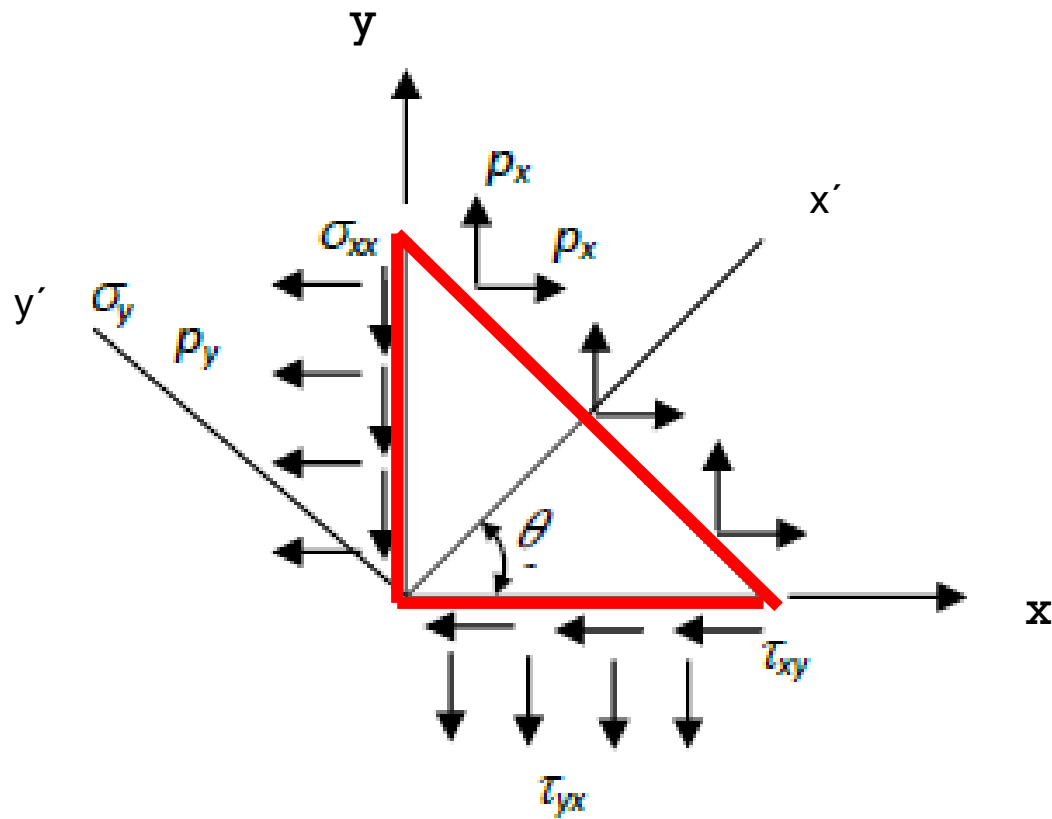
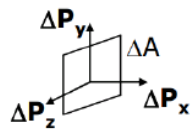
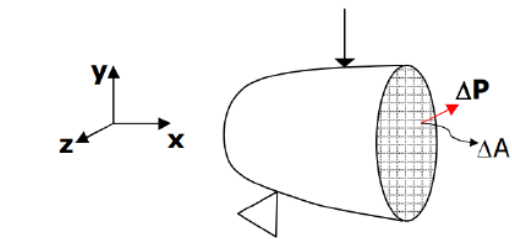
$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$



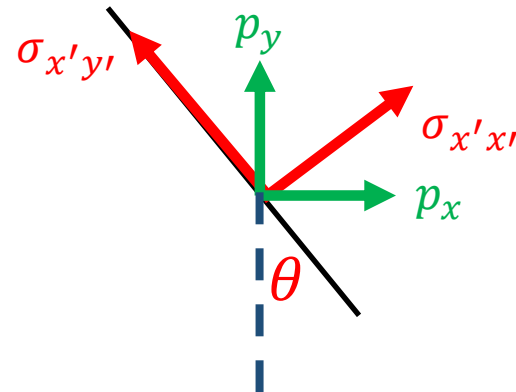
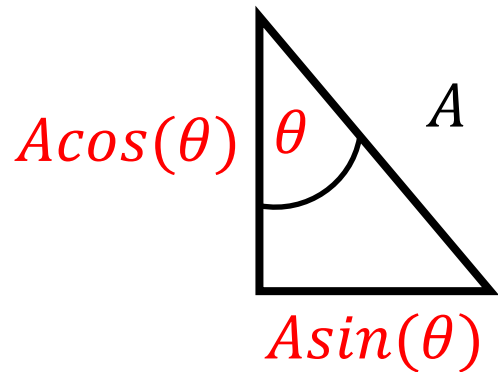




En caso de encontrar errores u omisiones,  
por favor informar a fochoa@ing.uchile.cl



# Rotación de Tensiones a Otro Plano

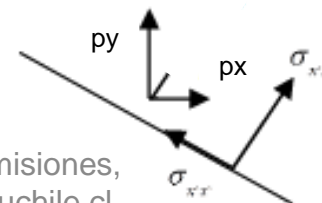
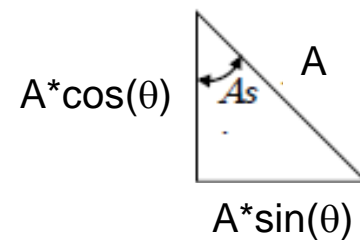
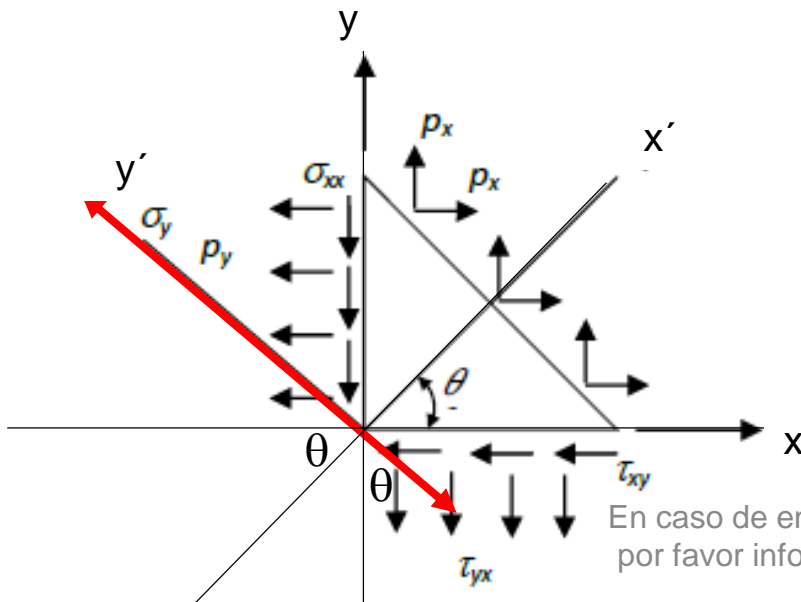


# Rotación de Tensiones a Otro Plano

- Se considera una sumatoria de fuerzas en la dirección horizontal.

$$\sum F_x = -\sigma_x A \cos\theta - \tau_{xy} A \sin\theta + \sigma'_x A \cos\theta - \tau'_{xy} A \sin\theta = 0$$

$$-\sigma_x A \cos\theta - \tau_{xy} A \sin\theta + A [\sigma'_x \cos\theta - \tau'_{xy} \sin\theta] = 0$$



Otro plano

En caso de encontrar errores u omisiones,  
por favor informar a fochoa@ing.uchile.cl

# Rotación de Tensiones a Otro Plano

- Pero también, en x:

$$-\sigma_x A \cos\theta - \tau_{xy} A \sin\theta + A p_x = 0$$

$$p_x = \sigma_x \cos\theta + \tau_{xy} \sin\theta$$

- Analogamente, en y:

$$-\sigma_y A \sin\theta - \tau_{xy} A \cos\theta + A p_y = 0$$

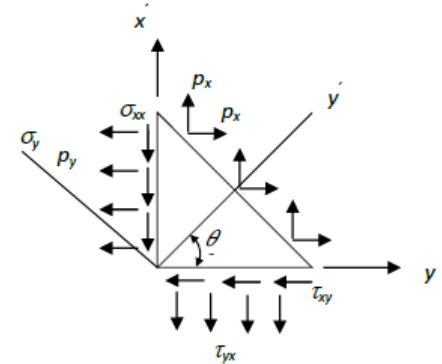
$$p_y = \sigma_y \sin\theta + \tau_{xy} \cos\theta$$

# Rotación de Tensiones a Otro Plano

- Proyectando las tensiones encontradas en los ejes considerados:

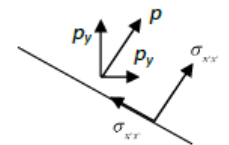
$$\sigma'_x = p_x \cos\theta + p_y \sin\theta$$

$$\sigma'_x = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy} \sin\theta \cos\theta$$



- En el eje  $y'$ , **existe una desangulación de  $90^\circ$**  respecto a  $x'$ :

$$\sigma'_y = \sigma_x \sin^2\theta + \sigma_y \cos^2\theta - 2\tau_{xy} \sin\theta \cos\theta$$



# Rotación de Tensiones a Otro Plano

- El corte se expresa como:

$$\tau'_{xy} = -p_x \sin\theta + p_y \cos\theta$$

- Reemplazando las definiciones de  $p_x$  y  $p_y$  se tiene:

$$\tau'_{xy} = \tau_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (\sigma_y - \sigma_x)\sin\theta\cos\theta$$

# Rotación de Tensiones a Otro Plano

- Por otra parte:

$$\sin^2\theta = \frac{(1 - \cos(2\theta))}{2} ; \sin 2\theta = 2\sin\theta * \cos\theta ; \cos^2\theta = \frac{(1 + \cos(2\theta))}{2}$$

- Obteniendo

$$\sigma'_x = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma'_y = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau'_{xy} = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$



# Tensiones Principales y Corte Máximo

- Importante saber las tensiones máximas y mínimas.
- Se impone que:

$$\frac{d\sigma'_x}{d\theta} = 0$$

$$-2 \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \sin 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

- Despejando, se tiene:

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$

# Tensiones Principales

Plano donde la tensión normal es máxima & corte se anula

# Tensiones Principales y Corte Máximo

- Para el corte máximo:

$$\frac{d\tau'_{xy}}{d\theta} = 0$$

$$2 \left( \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \right) \cos 2\theta - 2\tau_{xy} \sin 2\theta = 0$$

- Obteniendo:

$$\tan(2\theta) = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -\left( \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right)^{-1}$$

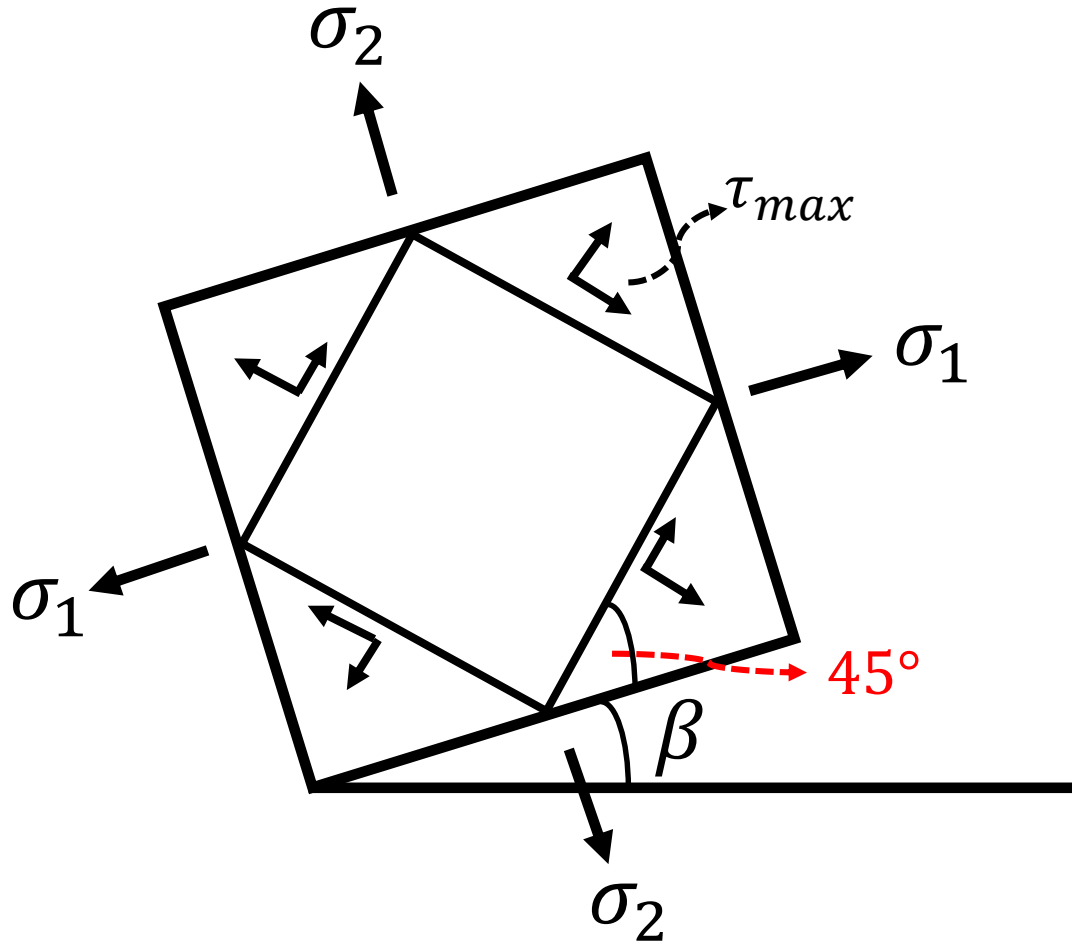
# Tensiones Máximas

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$

# Cortes Máximos

$$\tan(2\theta) = - \left( \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right)^{-1}$$

Entre los planos de tensiones y corte máximo existen 90 grados. Como las expresiones trabajan con ángulos dobles, se infiere que el ángulo que existe entre el plano de corte máximo y el plano de tensiones normales máximas es 45 grados.



# Tensiones Principales y Corte Máximo

- Se tienen los ángulos y las expresiones de rotación!
- Así, las tensiones principales, y de corte máximo son:

$$(\sigma'_x)_{min-max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

$$(\tau'_{xy})_{min-max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

- **Existen 45° entre los planos donde ocurren.**

# Tensiones en el Circulo de Mohr

- Mohr propuso representación gráfica

$$\sigma'_x - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \cos 2\theta + \tau'_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau'_{xy} = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

- Elevando al cuadrado, y sumando, se tiene:

$$\left(\sigma'_x - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)\right)^2 + (\tau'_{xy})^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2$$

# Tensiones en el Circulo de Mohr

- La expresión anterior es el de una circunferencia, de la forma:

$$(\sigma'_x - a)^2 + (\tau'_{xy})^2 = b^2$$

- Circunferencia de radio “b” y centro (0,a)

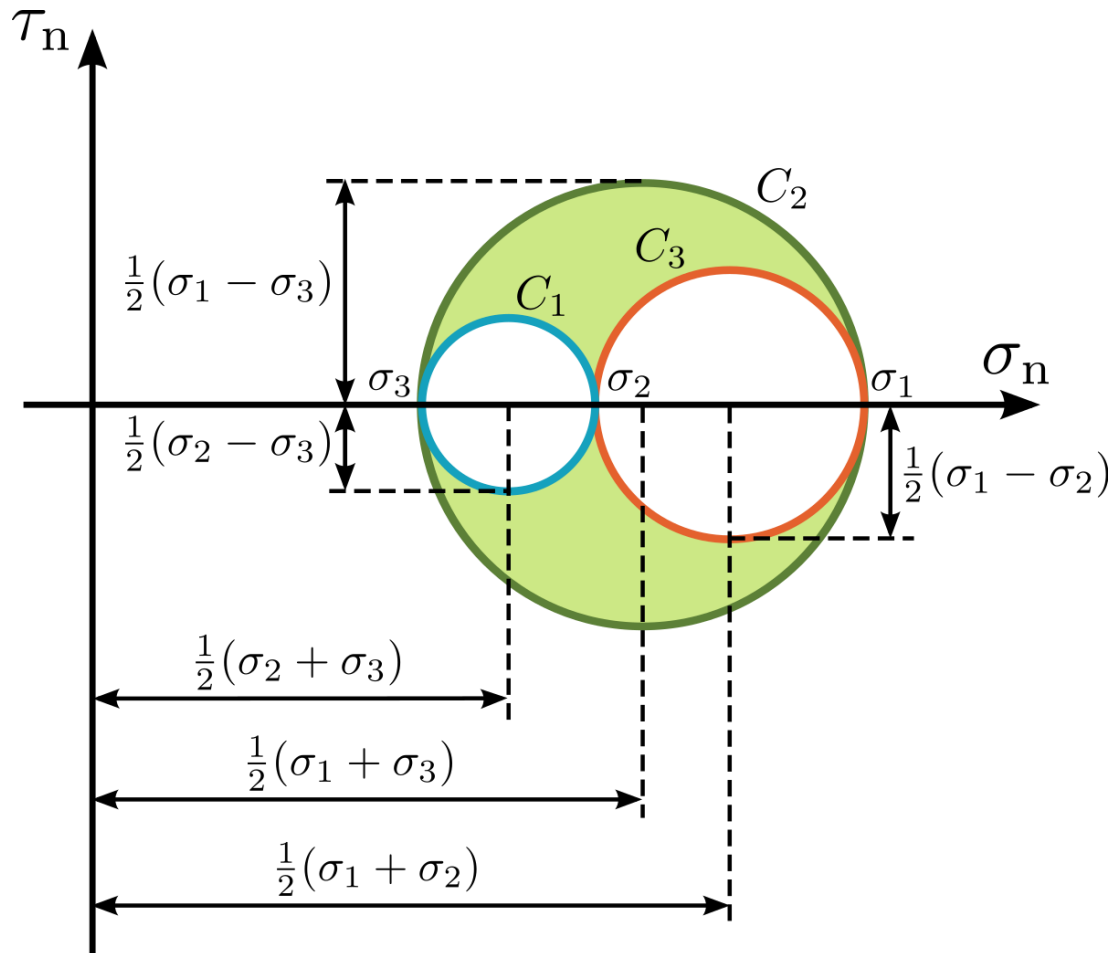
$$a = \sigma = \sigma_{medio} = \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)$$

$$b = R = \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

- “a” representa una tensión media, “b” representa el radio de la circunferencia



# Representación Gráfica Círculo de Mohr



**Siempre**  
 $\sigma'_1 > \sigma'_2 > \sigma'_3$

# Análisis de Deformaciones

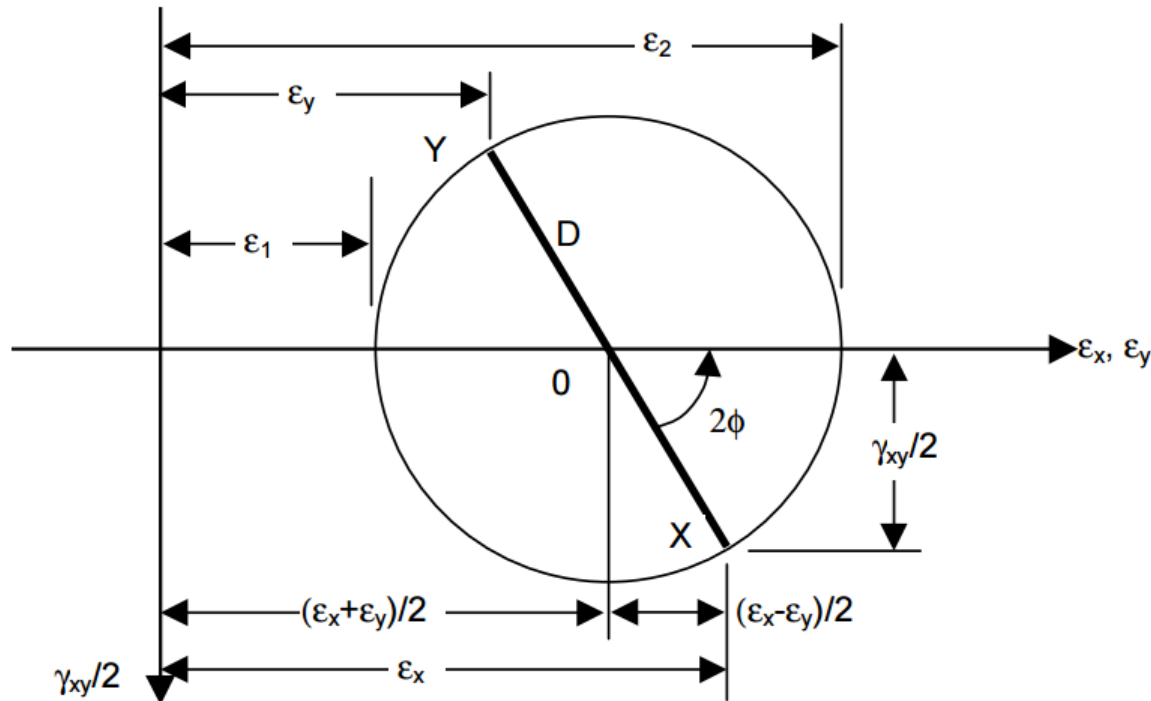
$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta$$

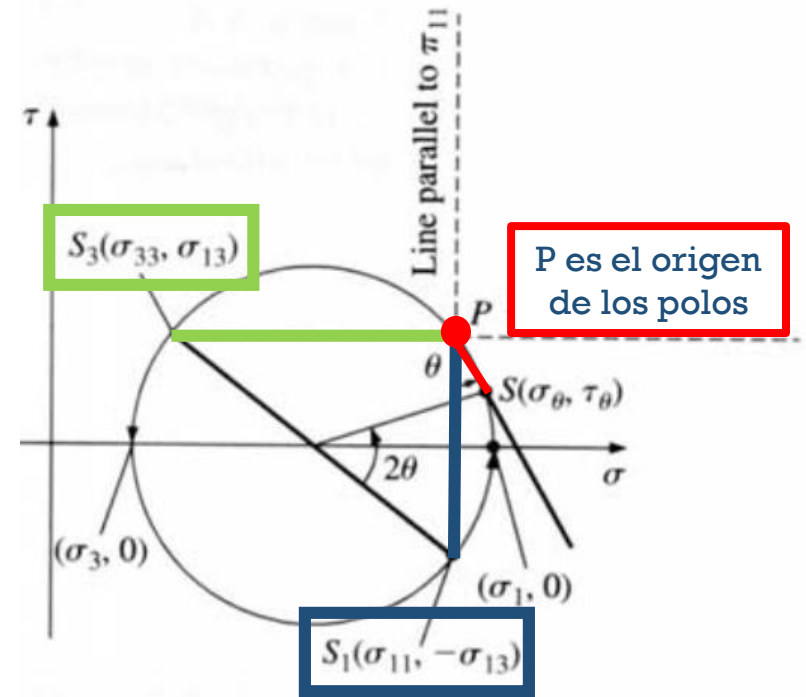
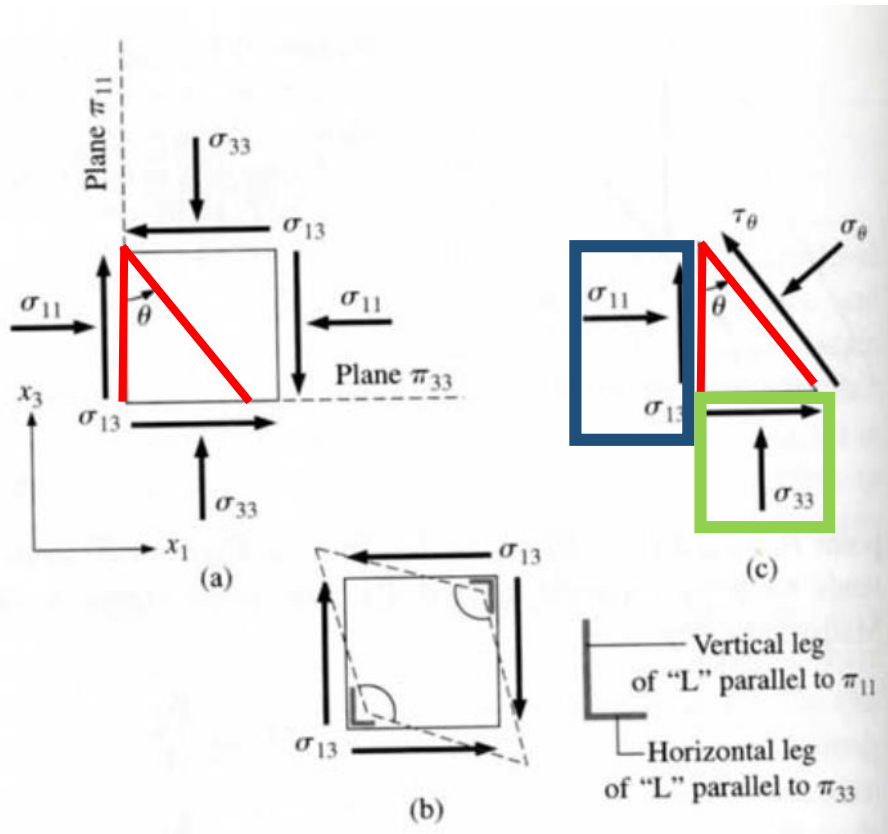
# Análisis de Deformaciones

## Círculo de Mohr



Cualquier error u omisión en el contenido,  
por favor indicar a fochoa@ing.uchile.cl

# Metodología de los Polos



# Metodología de los Polos

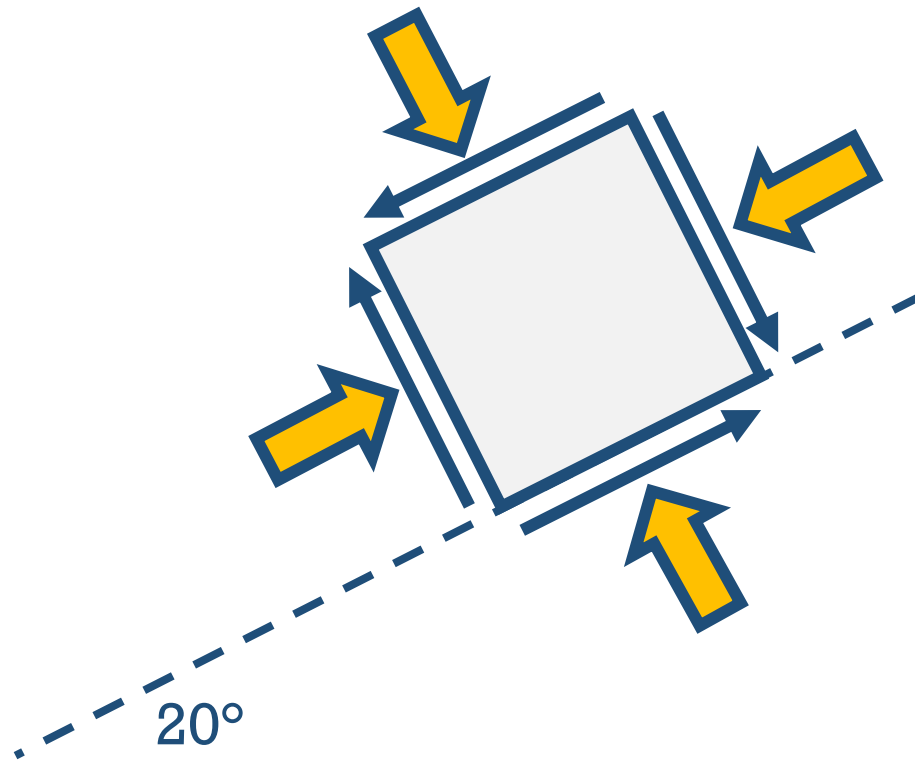
1. Identificar tensiones en el círculo de Mohr
2. Los signos de las tensiones se asignan:
  - Siguiendo la nomenclatura geotécnica
  - Siguiendo la regla de la mano derecha
3. Proyectar los planos según las tensiones
4. Intersección de las proyecciones es el polo P
5. Indicar el polo P
6. Desde P, intersectar recta con círculo, obteniendo  $(\sigma, \tau)$
7. Esta combinación se da en el ángulo que la recta tenga en la intersección con el círculo.

# Metodología de los Polos

Siempre

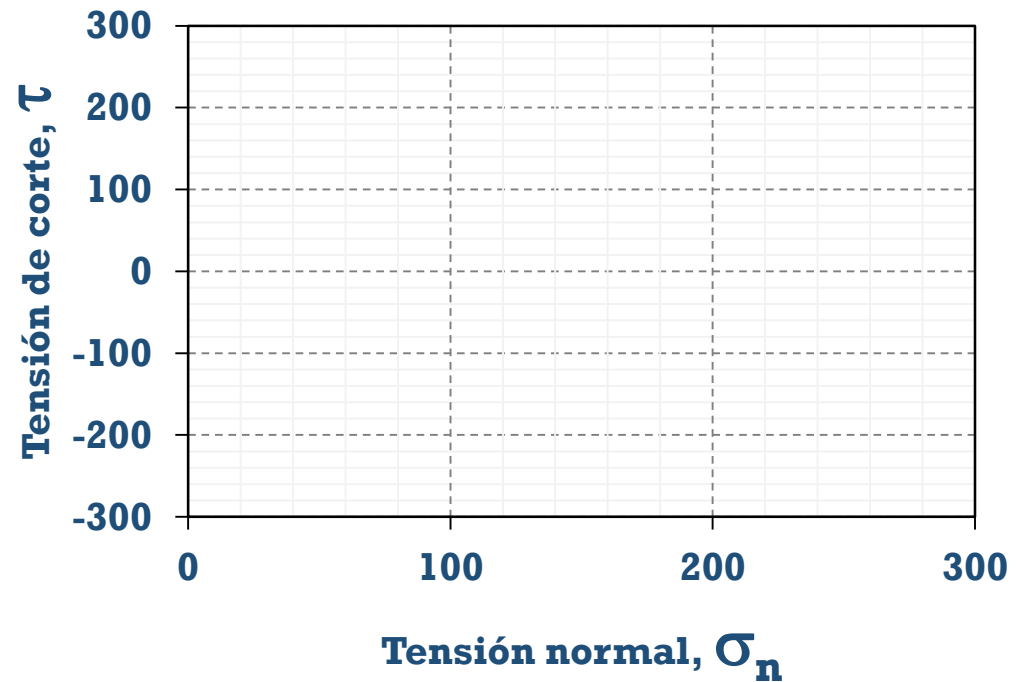
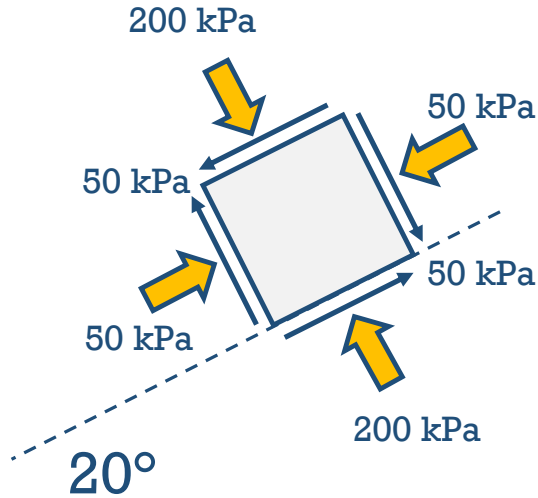
$$\sigma'_1 > \sigma'_2 > \sigma'_3$$

# Metodología de los Polos



# Metodología de los Polos

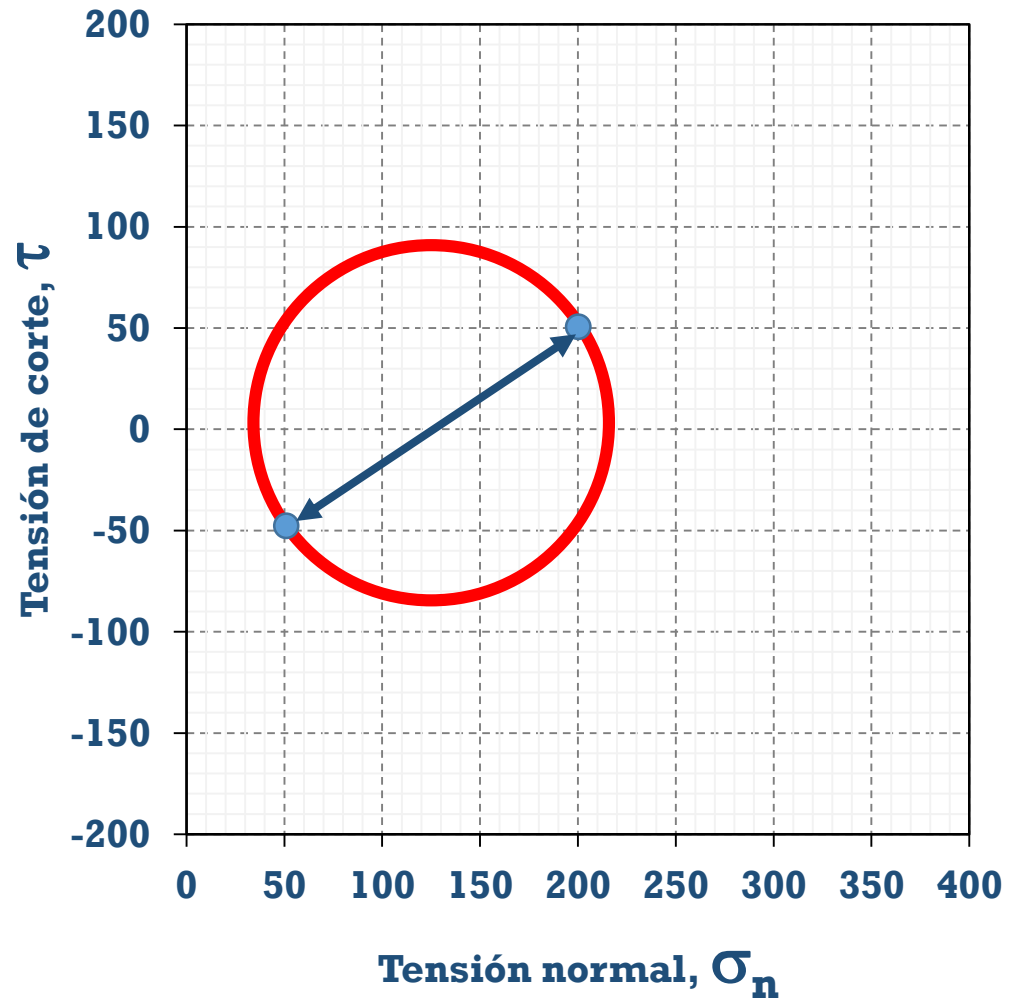
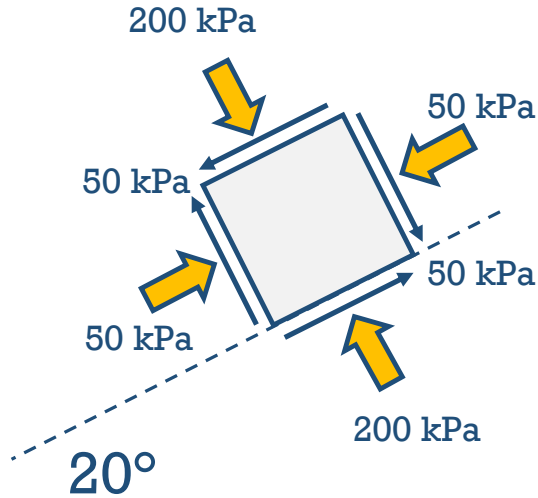
## Ejemplo





# Metodología de los Polos

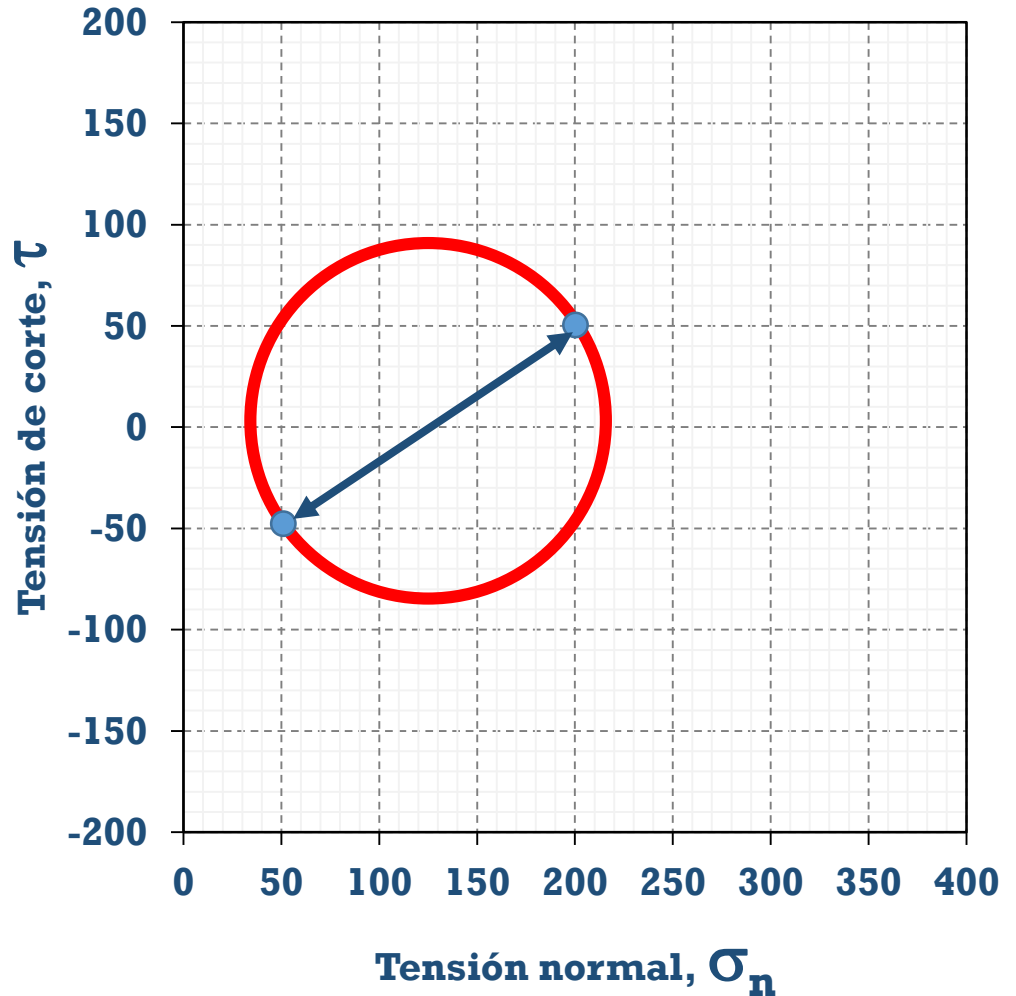
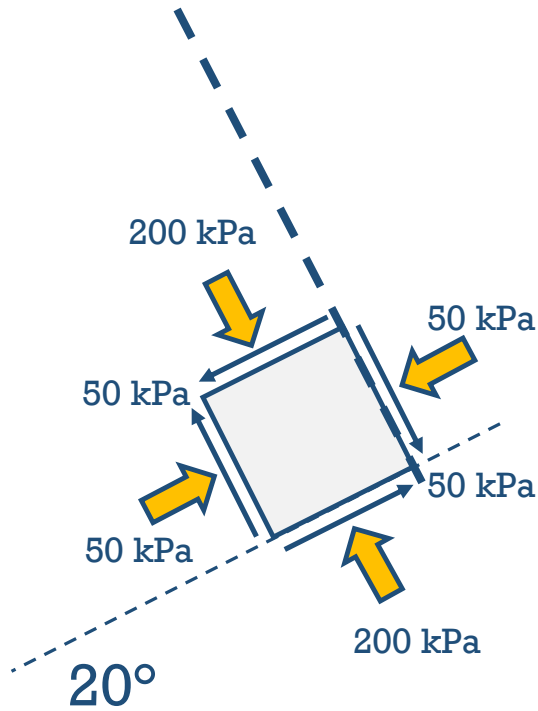
## Ejemplo



# Metodología de los Polos

## Ejemplo

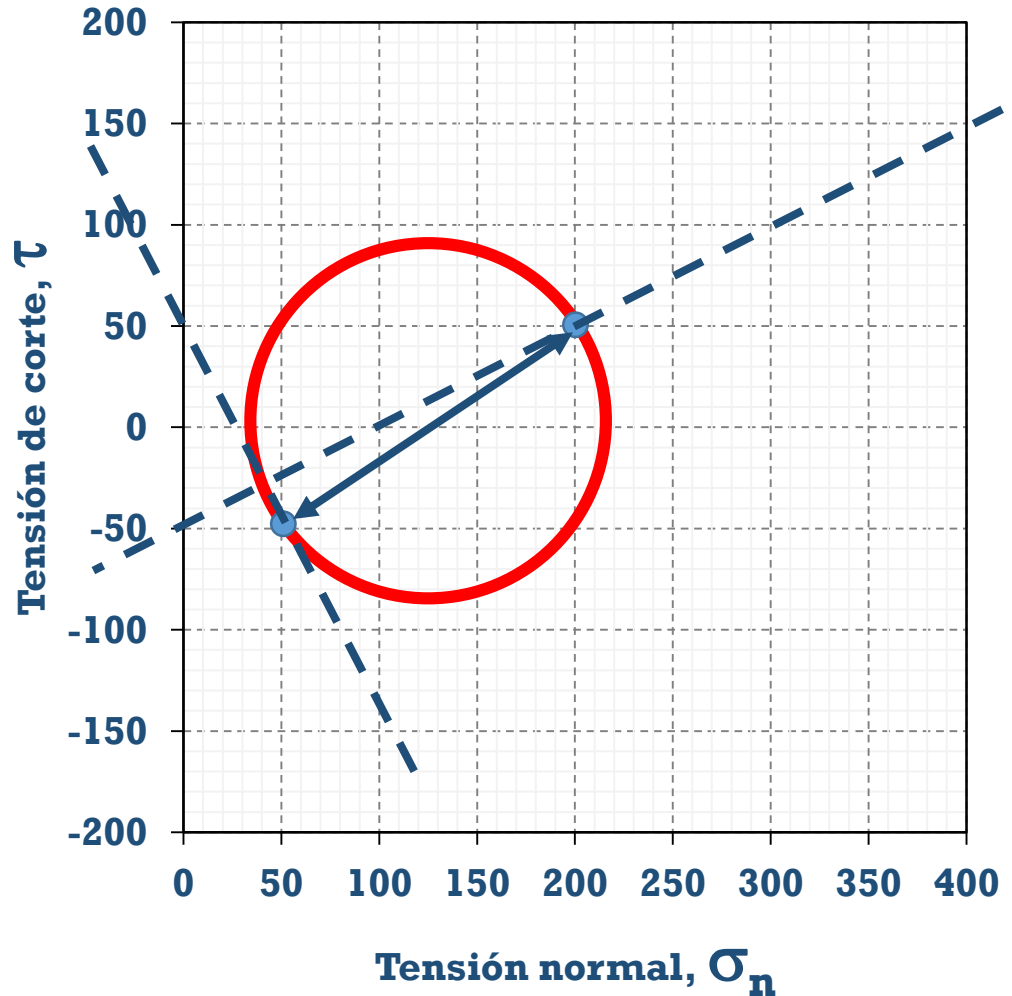
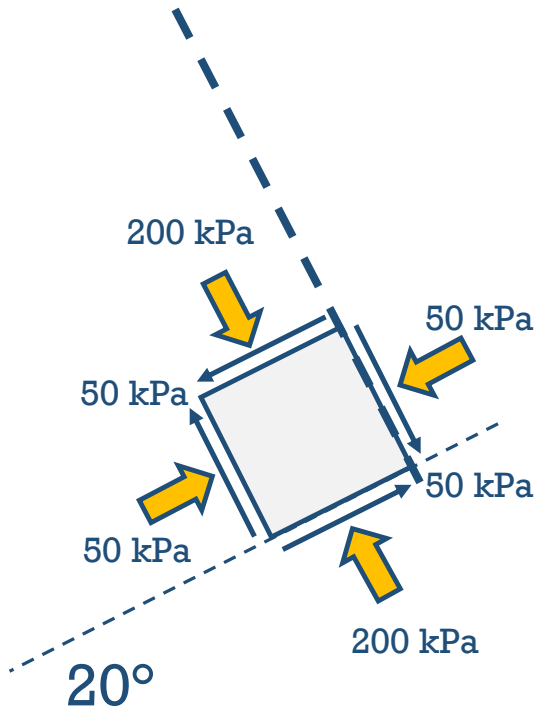
Felipe Ochoa-Cornejo, Ph.D. - Junio 2020



# Metodología de los Polos

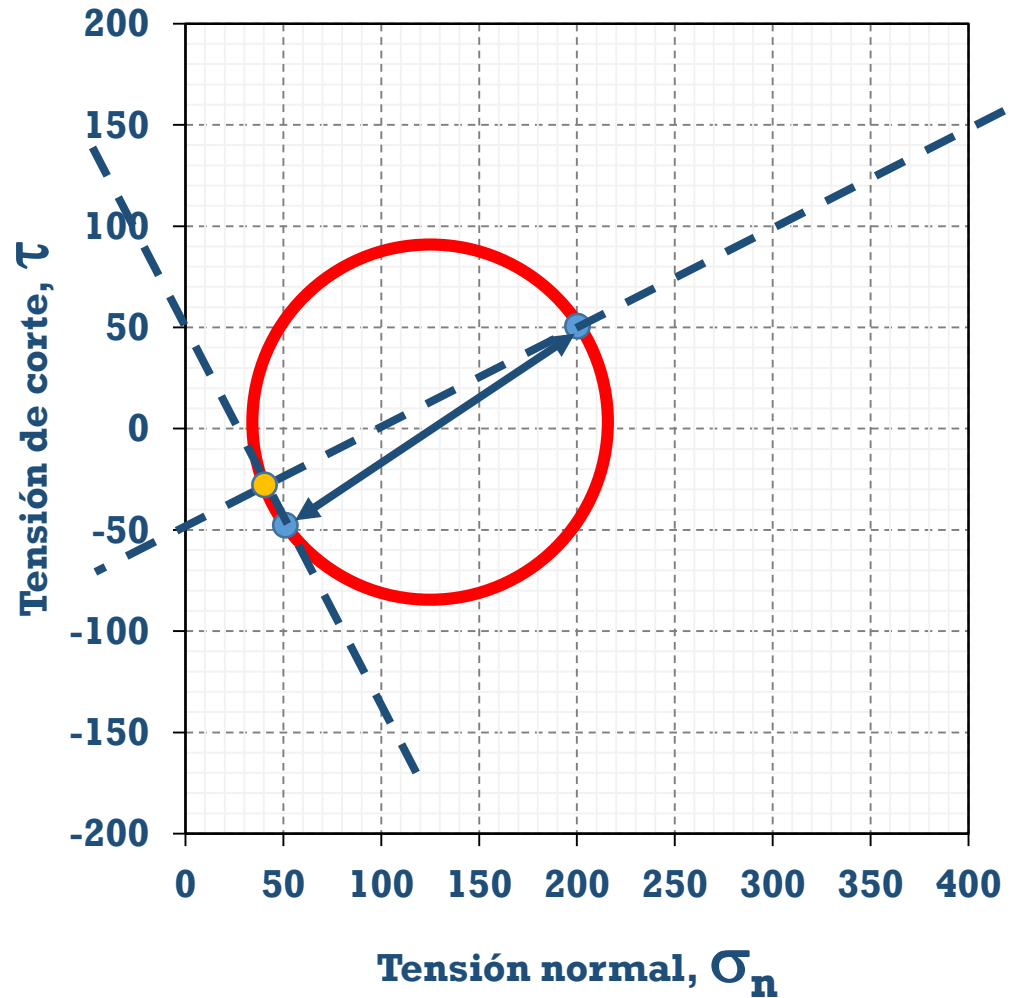
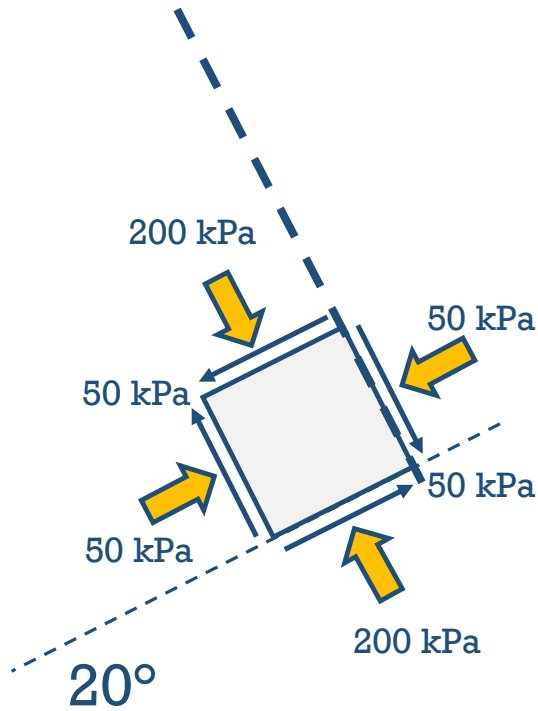
## Ejemplo

Felipe Ochoa-Cornejo, Ph.D. - Junio 2020



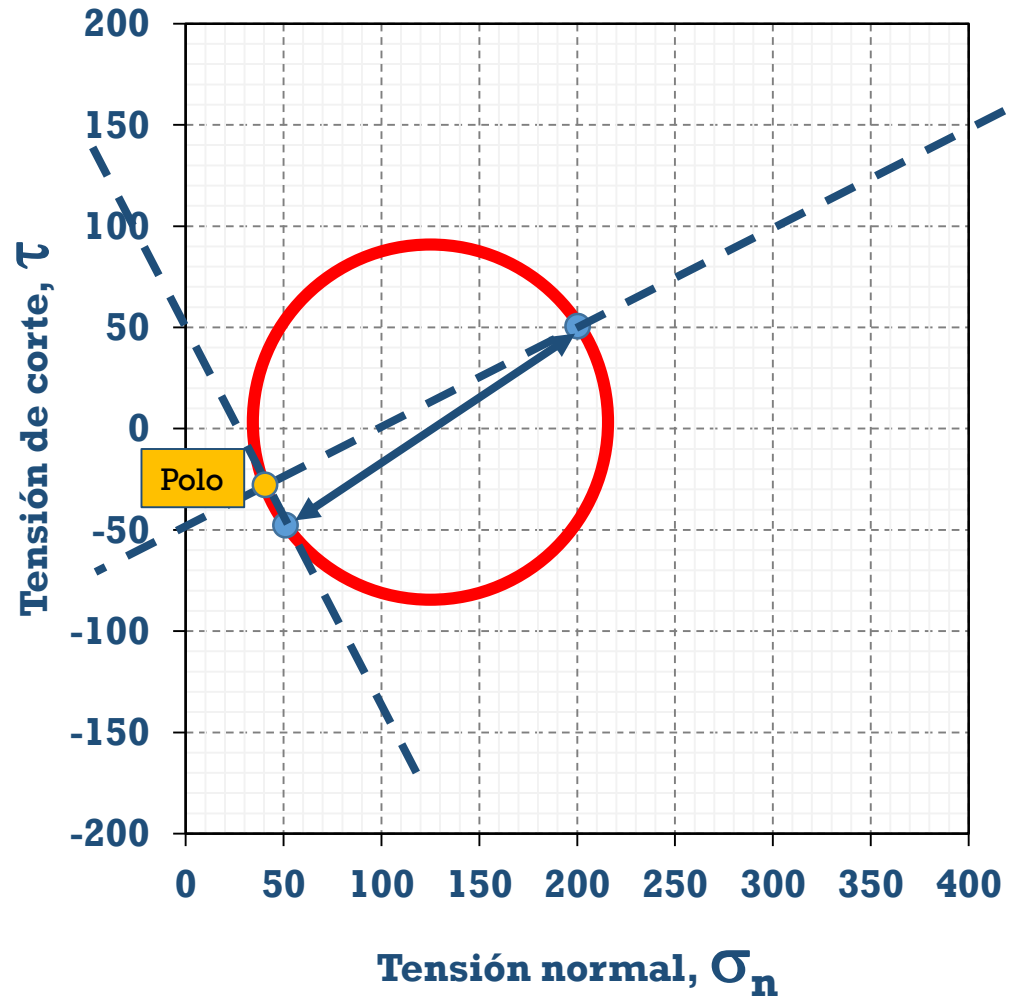
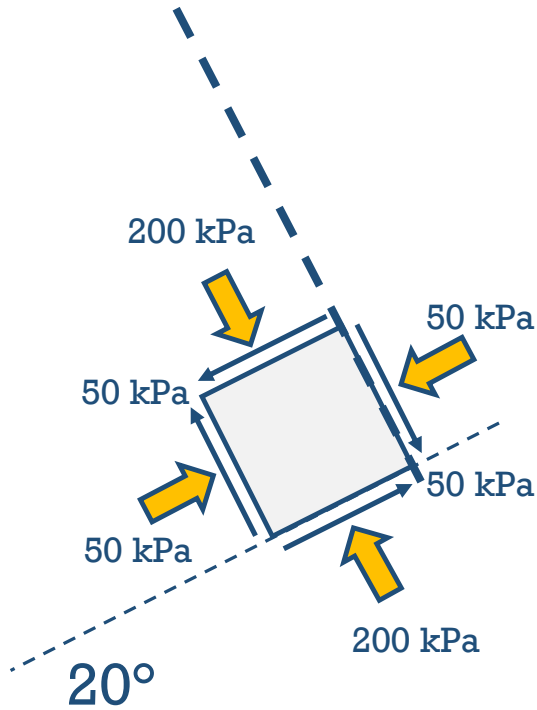
# Metodología de los Polos

## Ejemplo



# Metodología de los Polos

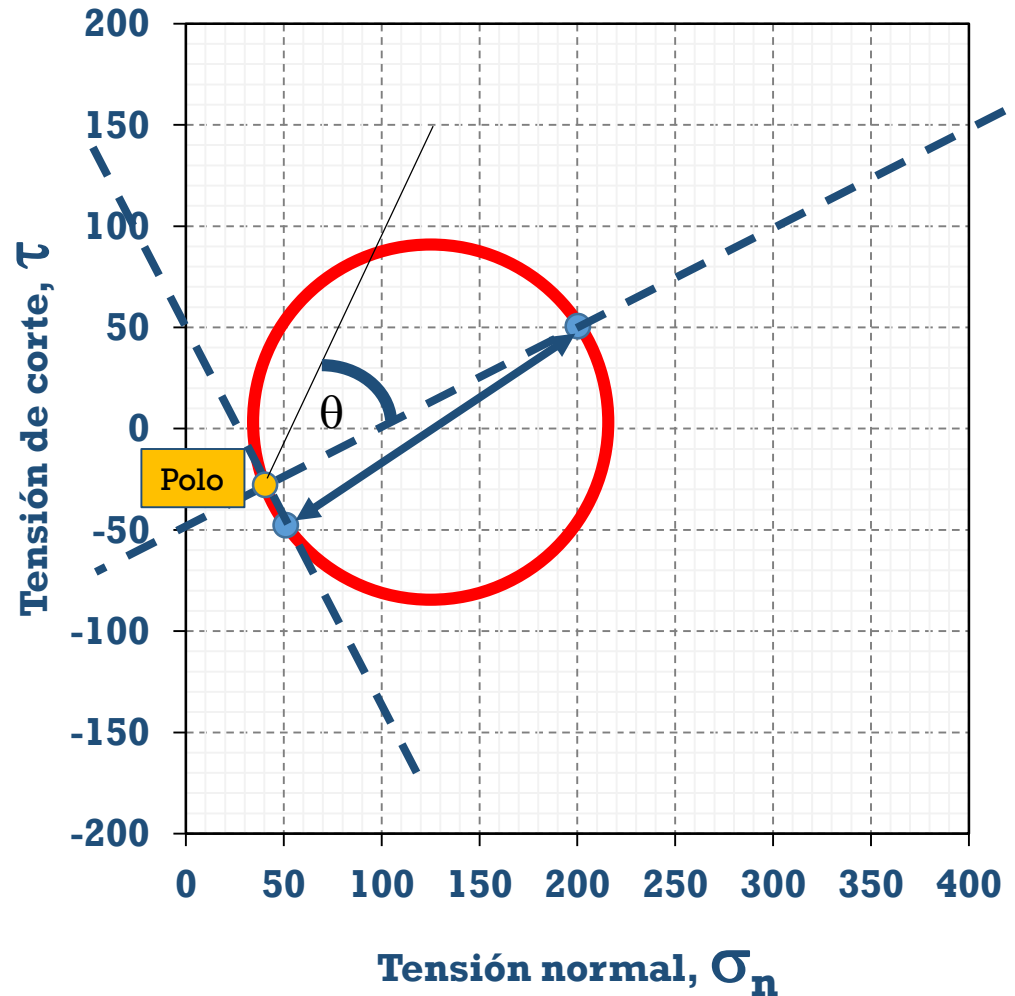
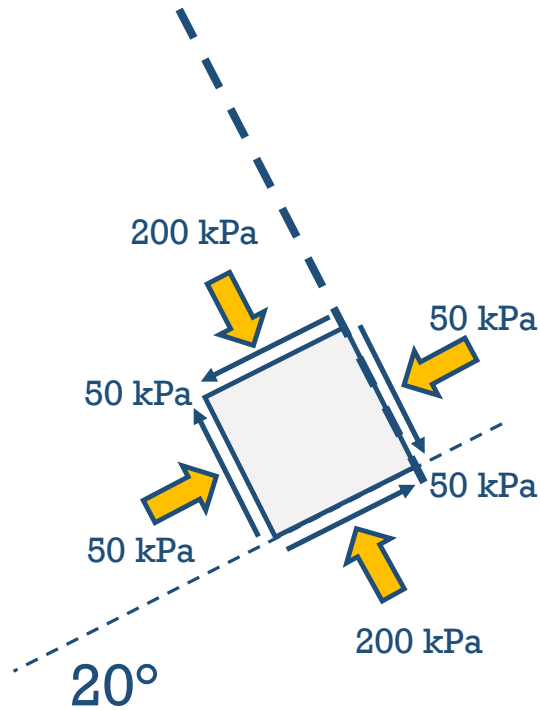
## Ejemplo



# Metodología de los Polos

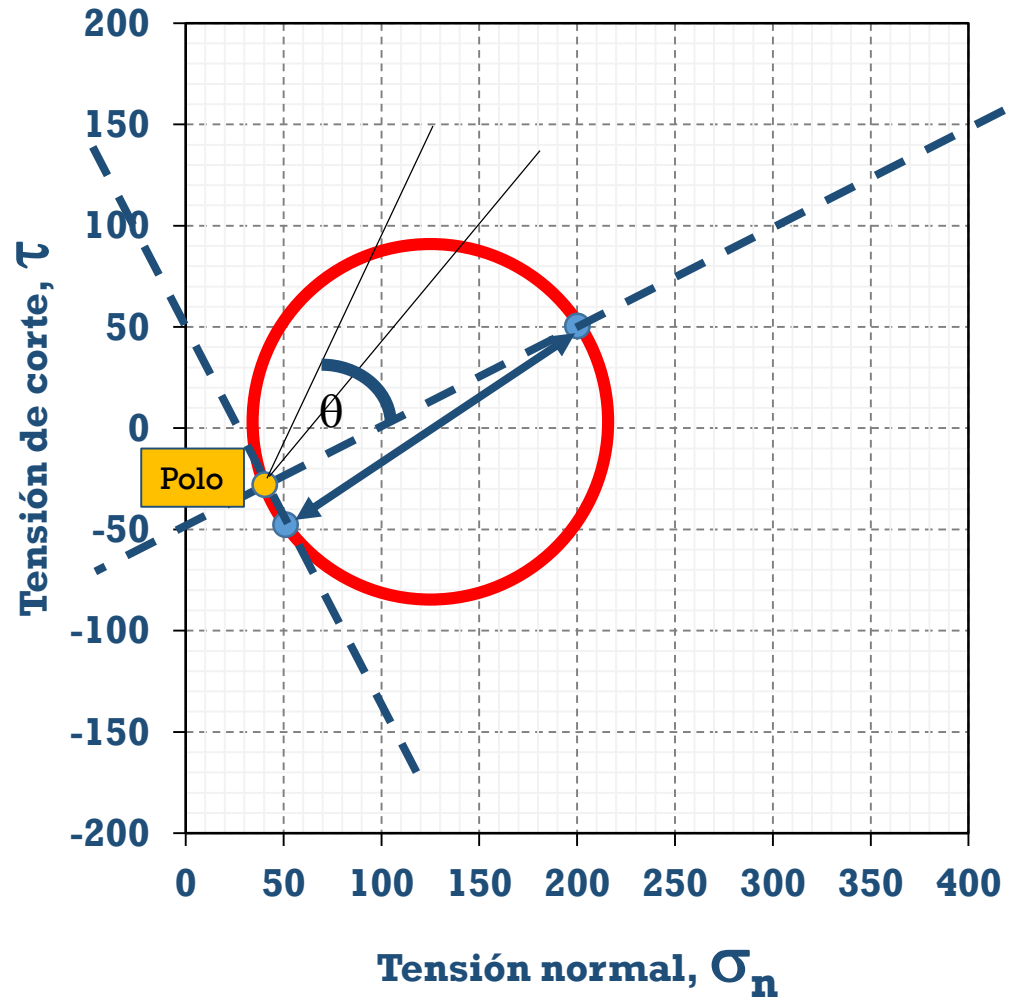
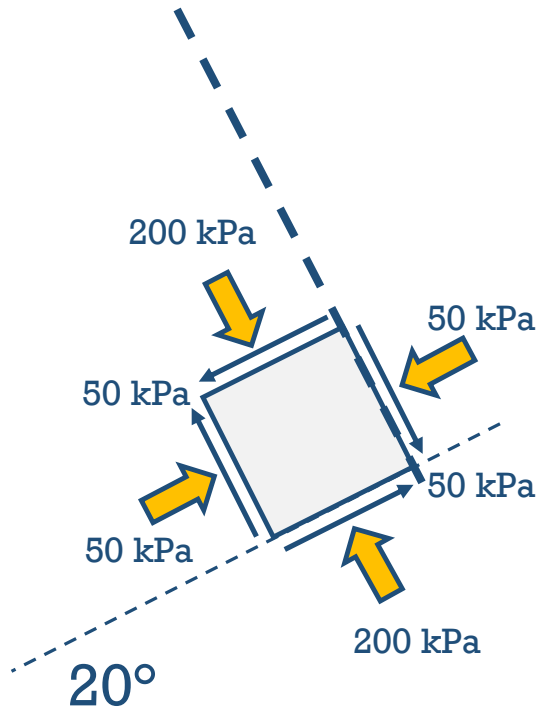
## Ejemplo

Felipe Ochoa-Cornejo, Ph.D. - Junio 2020



# Metodología de los Polos

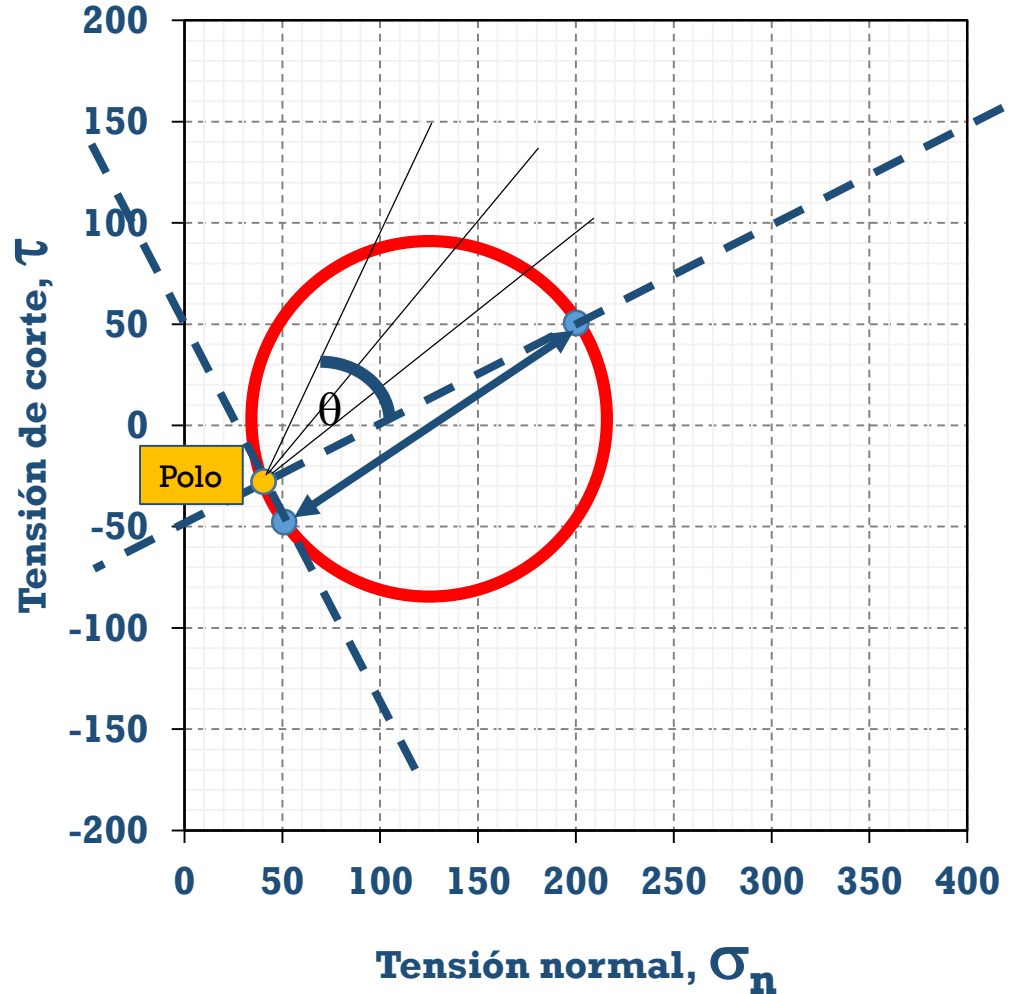
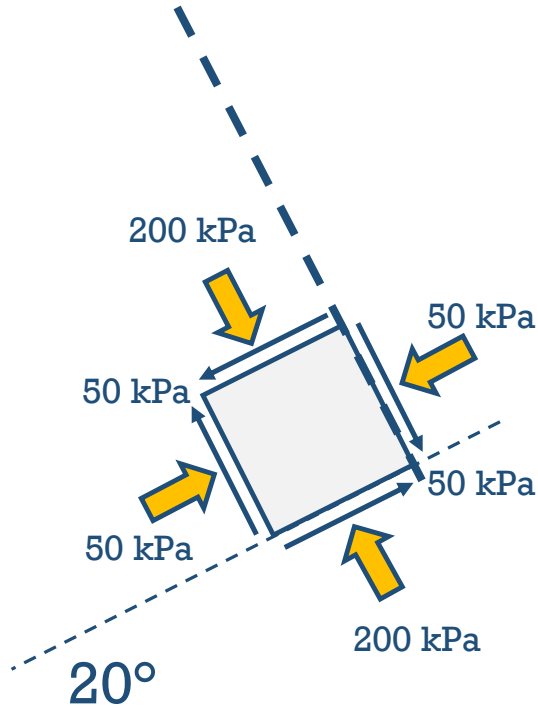
## Ejemplo



# Metodología de los Polos

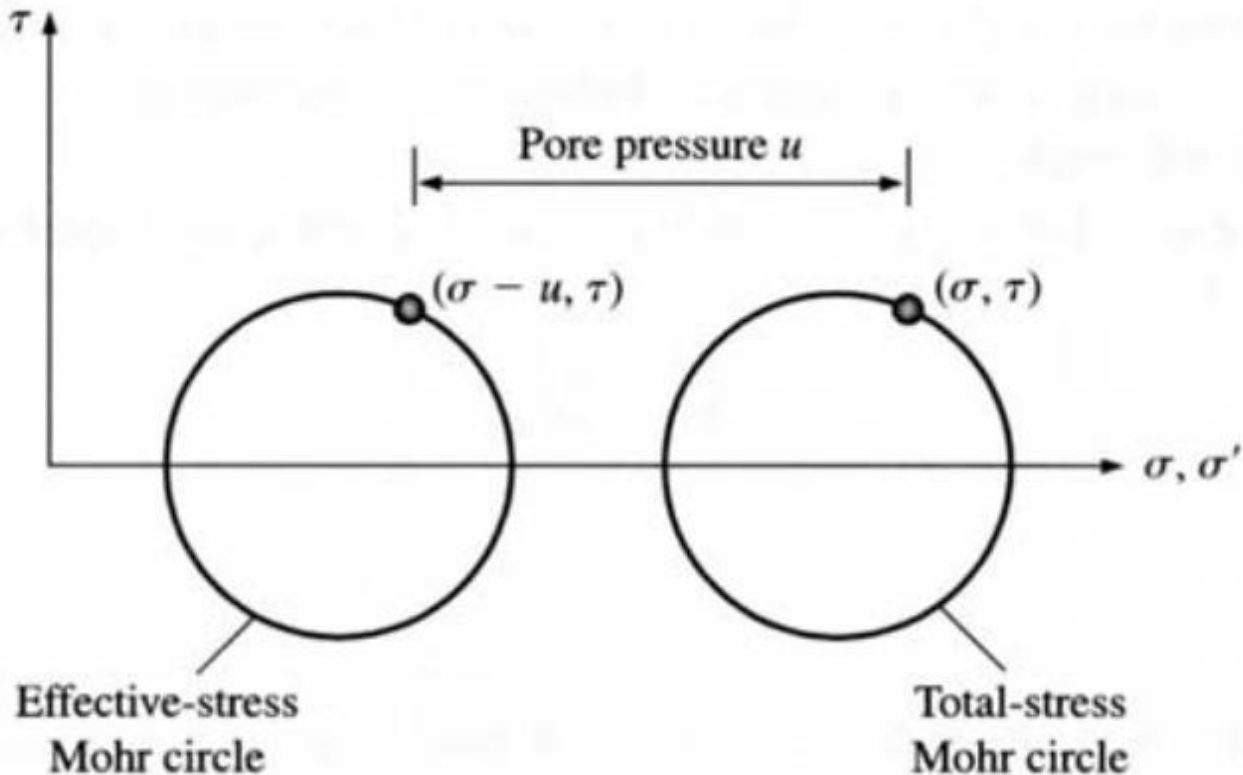
## Ejemplo

Felipe Ochoa-Cornejo, Ph.D. - Junio 2020





# Tensiones totales y efectivas en el círculo de Mohr



**Gracias!**