FI1000 Introducción a la Física Clasida

Auxiliar 3

Trigonometría, vectores y lanzamiento parabólico.

Manuel Torres V.

Semestre de primavera 2020

Jueves 24/9/2020

Tareas:

- Nota de tareas es el promedio de los n tareas:

$$NT = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}$$ (la tarea 0 no cuenta)

- Las tareas atrasadas se deben enviar al profe explicando el motivo.

- Siendo escriba se borra la peor tarea.

Control:

- Un solo control
- Un examen (hasta el momento)

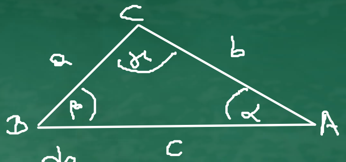
Valen lo mismo $\rightarrow$ NC

- Examen recuperativo.

P1 - Teorema del coseno:

Sea $\triangle ABC$ con lados a, b, c y ángulos α, β, γ opuestos a los lados respectivamente. Entonces:

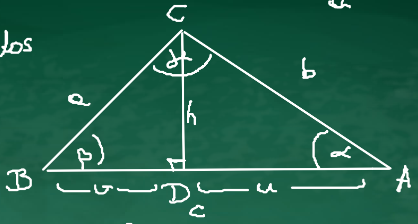
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$



Comentario:

Para esto podemos usar las defs. de las funciones trigonométricas, semejanza de $\triangle$s y el teorema de Pitágoras.

$\frac{v}{a} = \cos(\beta)$



Demostración:

Sea $\triangle ABC$ y $\triangle ACD$, $\triangle BCD$ rectángulos donde $\overline{DC}$ es la altura respecto a C.

Luego por teorema de Pitágoras se cumple que:

ec 1) $h^2 + u^2 = \underline{b^2}$

ec 2) $h^2 + v^2 = a^2$

Obs: Si $\triangle ABC$ es rectángulo $(\gamma = \pi/2)$ $\iff a^2 + b^2 = c^2$.

Sumando ec 1 + ec 2 $\Rightarrow 2h^2 + u^2 + v^2 = a^2 + b^2$

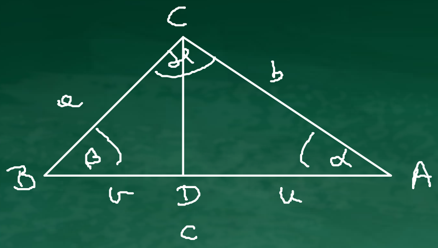
Notar que $c = u + v \Rightarrow c^2 - 2uv = u^2 + v^2$ (1)

o bien: $(c-u)^2 = v^2$ (2)

o bien: $(c-v)^2 = u^2$ (3)

Hay que usar uno de los 3.

Veamos el Δ:



Notemos que $\frac{v}{a} = \cos\beta \Longrightarrow \underline{v = a\cos\beta}$ (ec 3)

(análogamente $\frac{u}{b} = \cos\alpha \Longrightarrow u = b\cos\alpha$)

(*) El teorema se cumple para cualquier perspectiva del Δ.

Sea $c = \underline{u+v} \iff c - u = v \implies (c-u)^2 = v^2$ (más conveniente que lo que teníamos hecho):

$$\implies a^2 + c^2 - 2cv = b^2 \quad \text{(eq 4)}$$

Como $v = a\cos\beta$, al reemplazar esto permite concluir: $a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = b^2$ $\square$

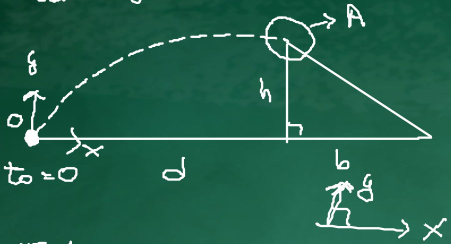
<u>Comentario:</u> Al despejar: $c - u = v \implies a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = b^2$

mientras que: $c - v = u \implies b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2$

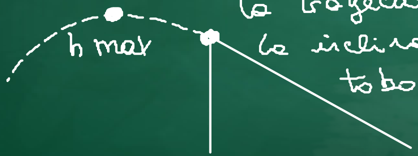
Notar que el resultado no depende de la altura h_i.

P2] Lanzamiento parabólico:

Hallar $\vec{V}_0$

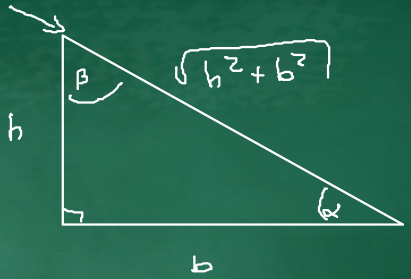


Vista A:



La trayectoria tiene la inclinación del tobogán.

Sabemos los ∢ del triángulo que representa el tobogán.



Usando teorema del seno:

$$\frac{\sqrt{h^2+b^2}}{\operatorname{sen}\pi/2} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Notar que $\operatorname{sen}\beta = \cos\alpha \wedge \operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$ pues $\pi/2 = \alpha + \beta$.

$\Rightarrow$ Es conocido sen(·), cos(·) y tg(·) de α, β en el tobogán. Esto lo supondremos conocido para usar.

Ahora veamos el problema de verdad. Tenemos un lanzamiento parabólico. Las ecuaciones cinemáticas son:

$\hat{x})$

$$x(t) = \cancelto{0}{x_0} + V_{0x}\, t$$

$$V_x(t) = V_{0x}$$

$$a_x(t) = 0$$

$\hat{y})$

$$y(t) = \cancelto{0}{y_0} + V_{0y}\, t - \frac{g t^2}{2}$$

$$V_y(t) = V_{0y} - gt$$

$$a_y(t) = -g$$

Digamos que $(x_0, y_0) = (0, 0)$

Tenemos: $x(t) = V_{0x}\, t$ $\qquad V_x(t) = V_{0x}$

$y(t) = V_{0y}\, t - \dfrac{g t^2}{2}$ $\qquad V_y(t) = V_{0y} - g t$

Donde hay 2 incógnitas: $\underbrace{V_{0x}, V_{0y}}_{\vec{V_0} = (V_{0x}, V_{0y})}, t$

Hay 2 formas de representar un vector:

1) $\vec{r} = (r_x, r_y)$

2) $\vec{r} = |\vec{r}| \cdot (\cos\theta\, \hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\, \hat{\jmath})$ donde θ es respecto al eje horizontal.

(1) y (2) son equivalentes, pues $|r|^2 = r_x^2 + r_y^2 \wedge \operatorname{tg}\theta = {r_y}/{r_x}$

Receta:

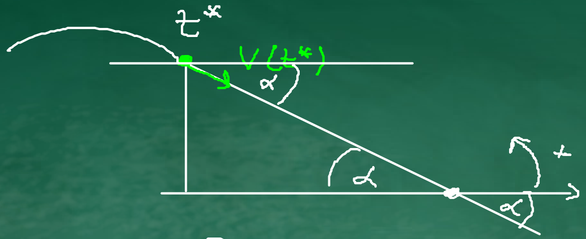
- Calcular todo lo posible con geometría
- Plantear ecuaciones de cinemática y tomar un sistema de referencias.
- Reconocer lo que se busca despejar y su equivalencia cartesiano/polar, y ver la restricción del problema.

Restricción:

Notar que $V(t^*)$ tiene dirección $-\alpha$ respecto al eje horizontal.

Veamos la restricción (me da una ecuación).

Sabemos que:



Figura

Recordar que:

1) $-\operatorname{sen}(\alpha) = +\operatorname{sen}(-\alpha)$
impar.

2) $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$
par.

$$\Rightarrow \frac{V_y(t^*)}{V_x(t^*)} = \underbrace{tg(\theta^*) = tg(-\alpha)}_{\alpha \text{ va en sentido horario en este caso}} = \frac{\operatorname{sen}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Osea: $\dfrac{V_y(t^*)}{V_x(t^*)} = -tg(\alpha) = -\dfrac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$

Recordar que el $\underbrace{\text{Teo. del seno}}_{\text{calculado al inicio.}} \Rightarrow \dfrac{sen\alpha}{h} = \dfrac{sen\beta}{b} = \dfrac{cos\alpha}{b}$

$\Longleftrightarrow \dfrac{sen\alpha}{cos\alpha} = \dfrac{h}{b}$

Luego $\boxed{\dfrac{V_y(t^*)}{V_x(t^*)} = -\dfrac{h}{b}}$, ahora hay que calcular t^* y la velocidad en t^*.

Obs: antes de hmax $\Rightarrow \dfrac{V_y(t^*)}{V_x(t^*)} = +\dfrac{h}{b}$, luego de hmax se tiene el signo menos. (que es este caso).

Ahora despejemos:

$x(t) = V_{0x}\, t \Rightarrow \dfrac{d}{V_{0x}} = t^*$ (1) $\Rightarrow$ Conocemos t^*.

$V_x(t^*) = V_{0x}$ (cte en el tiempo) (2)

$V_y(t^*) = V_{0y} - g\, t^*$ (3)

Conocemos $V(t^*)$

Luego veamos la proporción obtenida:

$\dfrac{V_{0y} - g\, t^*}{V_{0x}} = -\dfrac{h}{b} \Rightarrow V_{0y} - \dfrac{g\, d}{V_{0x}} = -\dfrac{h V_{0x}}{b}$ (4)

y usando $y(t)$ en $t^* \Rightarrow h = \dfrac{V_{0y}\, d}{V_{0x}} - \dfrac{g\, d^2}{2V_{0x}^2}$ (5)

Despejo V_{0x}, V_{0y}

Note que para despejar V_{0x} hay que usar la ecuación cuadrática. (en cualquier caso). Luego se despeja V_{0y}.

Despejando V_{0x}:

$$\frac{gd}{V_{0x}} - \frac{V_{0x}h}{b} = \frac{V_{0x}h}{d} + \frac{gd}{2V_{0x}}$$

$$\Rightarrow \frac{gd}{V_{0x}}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = V_{0x}\left(\frac{h}{d} + \frac{h}{b}\right)$$

$$\Rightarrow V_{0x}^2\left(\frac{h}{d} + \frac{h}{b}\right) = \frac{gd}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{0x} = \pm\sqrt{\frac{gd}{2}\left(\frac{h}{d} + \frac{h}{b}\right)^{-1}}}$$

Nos quedamos con $+$.

Luego como V_{0x} es conocido, se puede despejar V_{0y}:

$$\Rightarrow \frac{V_{0y} - \frac{gd}{V_{0x}}}{V_{0x}} = -\frac{h}{b}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{0y} = -\frac{h}{b}V_{0x} + \frac{gd}{V_{0x}}}$$

Terminando así el problema.