Auxiliar 3

Profesor: Francisco Brieva
Auxiliares: Cristobal Moreno, Enrique Navarro, Matías Araya

23 de Septiembre 2020

P1

Sea un péndulo simple que esta adjunto a un soporte que es forzado horizontalmente como se ve en la figura.

a) Determine la posición de la masa del péndulo en dos dimensiones $y - z$ como función del ángulo.

b) Con lo anterior encuentre la ecuación de movimiento para el ángulo que forma el péndulo con la vertical θ.

c) Usando la aproximación de pequeñas oscilaciones y que el movimiento sinusoidal del soporte tiene la forma $y_s = y_0 \cos \omega t$ encuentre la solución del problema. ¿Cuando ocurre resonancia?

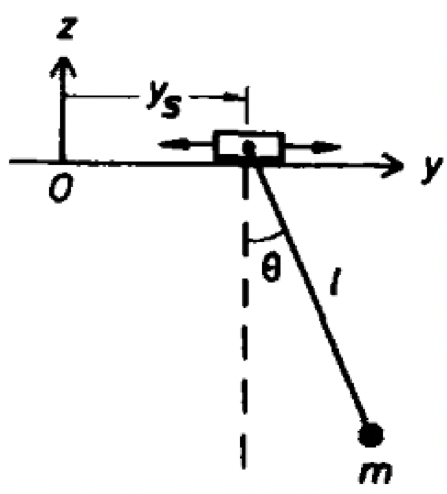

Figura 1: Péndulo problema 1.

P2

Una pequeña esfera de densidad de masa por unidad de volumen constante (ρ_m) y volumen V (su masa es M $= \rho_m$V) está ligada al extremo de una barra rígida de largo L y masa despreciable. La barra pivotea (puede rotar en el plano vertical) en torno a un punto fijo de una estructura de soporte (figura). El sistema se sumerge en un volumen (grande) de agua con densidad de masa por unidad de volumen ρ_a. Se quiere estudiar el comportamiento del péndulo en el fluido cuando el agua está en movimiento. Usando el ángulo θ que la barra del péndulo hace con la vertical para describir el movimiento y considerando las fuerzas de gravedad (de la tierra sobre la esfera), de empuje (del agua sobre la esfera) y de roce viscoso (debido al movimiento en el fluido) del tipo (donde c= coeficiente de roce viscoso).

$$\vec{F_{r-visc}} = -c\vec{v_{relativa}},$$

a) Determine la ecuación diferencial para la variable angular θ que describe el movimiento cuando el agua tiene una velocidad $\vec{v_a} = v_h\hat{x}$.

- encuentre la posición de equilibrio estable del péndulo cuando $\rho_m \approxeq \rho_a$;
- bajo qué condición oscilaría el péndulo al perturbarlo alrededor del equilibrio;
- determine la rapidez v_h del agua para que el amortiguamiento sea crítico.

b) Responda las mismas preguntas que en caso (a) si el agua tiene una velocidad $\vec{v_a} = v_v\hat{y}$

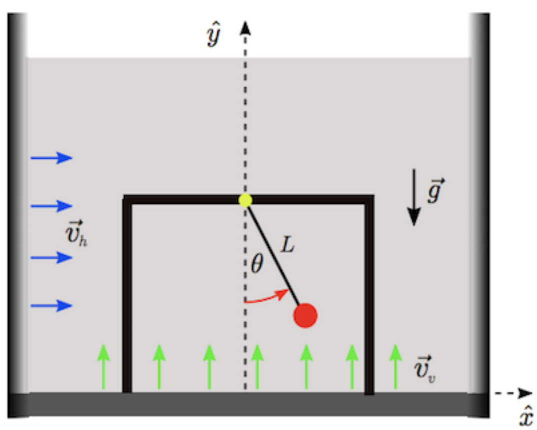

Figura 2: Péndulo problema 2.

P3

Una partícula de masa m después de caer una distancia h, se adosa a un resorte (largo) de constante k. El sistema resultante viene gobernado por la ecuación de movimiento:

$$\ddot{z} + w_0 z + 2w_0\dot{z}$$

donde la magnitud $z(t)$ mide la posición de la partícula respecto al punto de equilibrio $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ es la frecuencia natural del sistema. La solución general esta dada por:

$$z(t) = (A + Bt)e^{-w_0 t}$$

a) Determine A y B usando las condiciones iniciales.

b) Sea t_0 el instante en que el resorte tiene su máxima compresión. Evalúe t_0 (Elija el cero del tiempo en el instante en que la particula culisiona con el resorte).

c) haga un gráfico esquemático de la función $z(t)$.

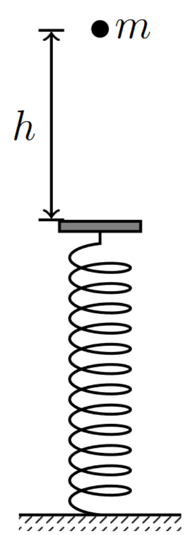

Figura 3: Sistema resorte-masa amortiguado.