P1) Si es solución, soluciona la ecuación de onda:

$$\partial_{tt} y = c^2 \partial_{xx} y$$

$\to \partial_x = kA\cos(kx+\phi)\cos(\omega t)$

$\to \partial_{xx} = -k^2 A\sin(kx+\phi)\cos(\omega t)$

$\to \partial_t = -\omega A\sin(kx+\phi)\sin(\omega t)$

$\to \partial_{tt} = -\omega^2 A\sin(kx+\phi)\cos(\omega t)$

$$\cancel{+}\ \omega^2 \cancel{A} \cancel{\sin(kx+\phi)} \cancel{\cos(\omega t)} = \cancel{+}\ k^2 c^2 \cancel{A} \cancel{\sin(kx+\phi)} \cancel{\cos(\omega t)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = k^2 c^2}$$

Calculemos la velocidad:

$$c^2 = \frac{T}{\rho} = \frac{T}{m} L \quad \Rightarrow \boxed{\omega = k\sqrt{\frac{TL}{m}}}$$

Aplicamos las codiciones de borde Libre:

- $\partial_x y(\ell, t) = 0$

$\to \cancel{k}\cancel{A}\cos(k\ell+\phi)\cancel{\cos(\omega t)} = 0$

$\to \cos(k\ell+\phi) = 0$

Viene del 0 del coseno

$\to k\ell + \phi = \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\to \boxed{k = \frac{\pi(2n+1) - 2\phi}{2\ell}}$$

- $\partial_x y(a,t) = 0$

$$\rightarrow \cos(\phi) = 0 \rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} + m\pi \qquad m = 0, 1, 2, \dots$$

Podemos elegir un m que nos acomode :) en particular con $m = 0$:

$$K = \frac{\pi(2n+\cancel{1}) - \frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{2}}}{2\ell} = \frac{\pi n}{\ell}$$

Luego $\omega = \frac{\pi n}{\ell}\sqrt{\frac{T\ell}{m}}$ → frecuencia natural, angular…

↓

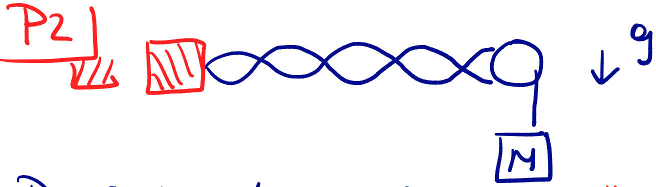
Pero no la propia!! ..

$$f_n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{n}{2\ell}\sqrt{\frac{TL}{m}}$$

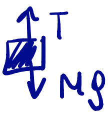
→ frecuencia própia!! notemos que para el caso $m=0$ es igual a la frecuencia con 2 borde libres :)

→ Recuerden que empezó Octubre ..

P2



Por DCL en la masa:



$$\Rightarrow T - Mg = 0 \Rightarrow \boxed{T = Mg}$$

ya que NO acelera la masa

Luego, la velocidad de propagación en la cuerda es:

$$c^2 = \frac{T}{\rho} = \frac{Mg}{m} L$$

Ahora, usamos el ansatz: $y(x,t) = A\sin(kx)\cos(\omega t)$

En la cond. de borde $y(L,t) = A_p \cos(\omega_p t)$ ← Así se mueve el borde

$$\rightarrow A\sin(kx)\cos(\omega t) = A_p\cos(\omega_p t)$$

$$\Rightarrow A = \frac{A_p}{\sin(kL)} \rightarrow \text{amplitud}$$

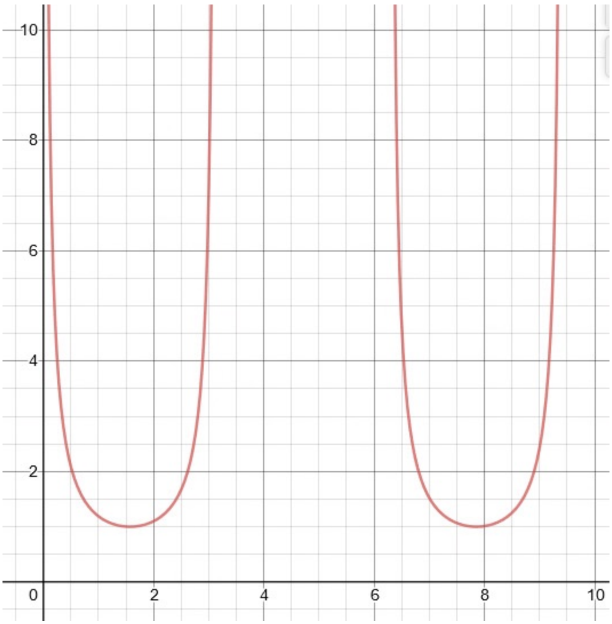
$$\Rightarrow \cos(\omega t) = \cos(\omega_p t) \Rightarrow \omega = \omega_p \rightarrow \text{frecuencia}$$

$$\rightarrow y(x,t) = \frac{A_p}{\sin(kL)}\sin(kx)\cos(\omega t)$$

Veamos que ocurre con la Amplitud:

Primero $k = \frac{\omega}{c} \rightarrow \sin(kL) = \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right)$

$$\rightarrow A(w) = \frac{Ap}{\sin(wl/c)} \leftarrow \text{grafiquemos!!}$$



* Hay frecuencias donde la amplitud diverge

* estas frecuencias estan asociadas al 0 del seno

* $\frac{wl}{c} = 2\pi n$

$\rightarrow w = \frac{2\pi n . c}{e}$

$\rightarrow f_n = \frac{\pi n c}{e}$

relación!

∴ La amplitud diverge cuando la frecuencia es muy cercana a la frecuencia propia del sistema!

P3) Usando ansatz: $y(x,t) = A\sin(\kappa x)\cos(\omega t)$

a)

- Ahora en la cond. inicial:

$$y(x,0) = A\sin(\kappa x)\cancel{\cos(0)}^{1} = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \rightarrow \boxed{\kappa = \frac{\pi}{2}}$$

$\hookrightarrow A = 1$

curioso que llegamos a lo mismo

$\rightarrow$ Solución del sistema: $y(x,t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos(\omega t)$

b) Es solución si soluciona:

$$\partial_x = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos(\omega t)$$

$$\partial_{xx} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos(\omega t)$$

$$\partial_t = -\omega\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin(\omega t)$$

$$\partial_{tt} = -\omega^2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos(\omega t)$$

$$\rightarrow \partial_{tt}y = c^2\partial_{xx}y \rightarrow +\omega^2\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos(\omega t)} = +\left(\frac{\pi}{2}\right)^2c^2\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos(\omega t)}$$

$\rightarrow \omega^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2c^2$ donde

$\rightarrow \omega = \underbrace{\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{\kappa}c \rightarrow$ donde $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

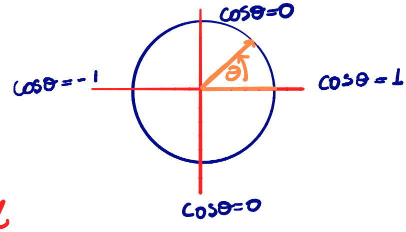
$\rightarrow \omega = \kappa\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ y llegamos a la expresión del enunciado

c) Queremos que en t^* $y(x,t^*) = y(x,0)$

$$\rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos(\omega t^*) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$\rightarrow \cos(\omega t^*) = 1$$

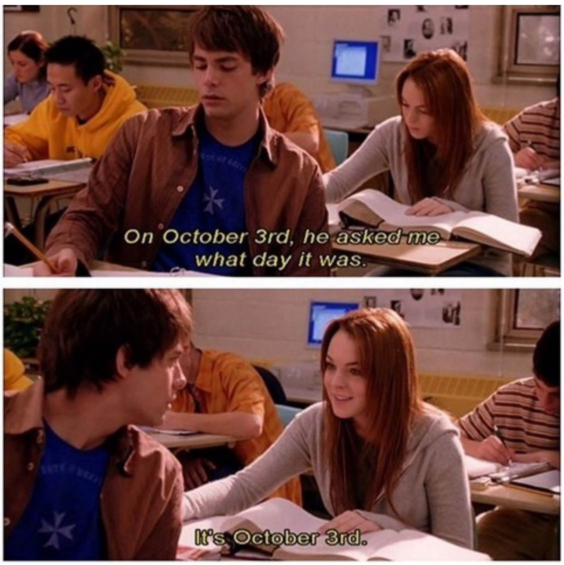
$\Rightarrow \omega t^* = 2\pi n$ con $n = 0, 1, 2, \ldots$



$\rightarrow \boxed{t^* = \dfrac{2\pi n}{\omega}}$ En esta familia de tiempos la función vuelve a la forma inicial

* Notemos que está relacionado con el periodo T de la onda!

$T = \dfrac{1}{f}$ donde $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$



A la fecha de subida esta pauta es 03/10, Never forget.