FI3101-1 Mecánica Clásica.
Profesor: Marcel Clerc.
Auxiliares: Roberto Gajardo, David Pinto.

Desarrollo Auxiliar 1: Principio de Mínima Acción.

08 de Septiembre de 2020

* **El principio de mínima acción**[1]:

Todo sistema mecánico está caracterizado por una función escalar conocida como **lagrangiano**. Esta función en su caso general tiene como argumento las coordenadas generalizadas q_i, sus derivadas temporales $\dot{q}_i$, y en algunos casos el tiempo t, de tal forma que el lagrangiano L tiene la forma:

$$L = L(q_1, q_2, ..., q_N; \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_N; t)$$

La dinámica del sistema mecánico es tal que *cierta* condición sobre este lagrangiano se satisface. Para definir esa condición, primero debemos definir lo que es la *acción*.

Supongamos que entre tiempos t_1 y t_2 la partícula ocupa las posiciones $\{q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, ..., q_N^{(1)}\}$ y $\{q_1^{(2)}, q_2^{(2)}, ..., q_N^{(2)}\}$, respectivamente. Se define el funcional[2] escalar llamado **acción** como:

$$S[L] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, ..., q_N; \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_N; t)dt \tag{1}$$

El **principio de mínima acción** o **principio de Hamilton** establece que la dinámica del sistema mecánico caracterizado por el lagrangiano L es tal que la acción es **mínima**. En ese sentido el *teorema fundamental del cálculo variacional* establece que el lagrangiano L que caracteriza la dinámica del sistema es tal que:

$$\delta S = 0$$

Entonces, variando la acción definida en (1) usando herramientas del cálculo variacional, se tiene que:

$$\delta S = 0 \;\Rightarrow\; \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right] dt = 0 \tag{2}$$

Tomando la integral I_i asociada a la coordenada i-ésima e integrando por partes, se tiene que:

$$I_i = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\delta q_i}{dt}\right] dt$$

$$u = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \;\Rightarrow\; du = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) dt \quad ; \quad dv = \frac{\delta q_i}{dt}dt \;\Rightarrow\; v = \delta q_i$$

$$\Rightarrow\; I_i = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]\Bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt$$

[1]También se conoce como *principio de Hamilton.*

[2]Un funcional es, por así decirlo, una función cuyo argumento son funciones. Estas funciones pueden "derivarse" a través de las herramientas del *cálculo variacional*, donde se busca la función tal que el funcional es mínimo o máximo.

La condición de *extremos fijos* nos dice que $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, y entonces el segundo término es cero. Juntando las dos integrales sobrevivientes y factorizando por δq_i, se tiene que:

$$\Rightarrow \; I_i = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \right] \delta q_i dt$$

Devolviendo a la suma en la expresión (2), se tiene que:

$$\Rightarrow \; \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \right] \delta q_i dt = 0$$

Como los q_i son las coordenadas generalizadas, entonces los δq_i son linealmente independientes, por lo tanto para que se cumpla la igualdad anterior es necesario que cada una de las integrales por separado sea cero, es decir:

$$\Rightarrow \; \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \right] dt = 0$$

Por último, para que esta integral se anule es necesario que el integrando sea cero, y entonces se tiene que:

$$\Rightarrow \; \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$$

Que corresponde a la ecuación de Euler-Lagrange para la coordenada generalizada q_i.

Una consecuencia de la definición (1) para la acción es que si al lagrangiano L de un sistema mecánico se le suma una cantidad $\frac{df}{dt}$ (una derivada total del tiempo), con $f(q_1, q_2, ..., q_N, t)$ una función de las coordenadas generalizadas y del tiempo, su ecuación de movimiento permanece inalterada. Es decir, sea el nuevo lagrangiano $L' = L + \frac{df}{dt}$, entonces:

$$\Rightarrow \; S[L'] = \int_{t_1}^{t_2} \left(L + \frac{df}{dt} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt} dt \;\Rightarrow\; S[L'] = S[L] + f(q_i^{(2)}, t_2) - f(q_i^{(1)}, t_1)$$

Entonces, al momento de variar la acción el término constante $f(q_i^{(2)}, t_2) - f(q_i^{(1)}, t_1)$ desaparece, y entonces:

$$\delta S[L'] = \delta S[L]$$

Con lo cual se obtienen las mismas ecuaciones de movimiento al usar el lagrangiano L'.

El mismo procedimiento que se usó para mostrar que **el principio de mínima acción lleva a las ecuaciones de Euler-Lagrange** puede usarse para encontrar aquellas curvas que minimizan ciertas cantidades definidas como la acción. El problema 1 de este documento aborda el ejemplo de la *braquistócrona* como ejemplo de cálculo variacional, mientras que el problema 2 sigue un procedimiento similar al ocupado en este resumen para llegar a una ecuación equivalente a Euler-Lagrange para casos donde el lagrangiano L depende de derivadas temporales de orden 2 o mayor de las coordenadas generalizadas. El último problema aborda un ejemplo donde la acción se define a través de una *densidad lagrangiana*, la cual tiene como "coordenadas generalizadas" los campos que definen esta densidad. Este ejemplo sirve para apreciar el alcance que tiene el principio de mínima acción en la mecánica clásica.

P1. Ejemplo de cálculo variacional: La braquistócrona:

a) El tiempo T que demora el cuerpo en ir entre los puntos A y B es, por definición:

$$T = \int_{t_A}^{t_B} dt$$

Como queremos que T sea un funcional de la curva y y su derivada (con respecto a x) y', entonces lo mejor es conectar dt con algún diferencial que involucre a x e y. En ese sentido, recordemos que la rapidez instantánea v en una curva s está definida por:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Entonces desarrollando:

$$\Rightarrow \ dt = \frac{ds}{v} \ \Rightarrow \ T = \int_A^B \frac{ds}{v}$$

Para un objeto influenciado sólo por la gravedad se tiene que $v = \sqrt{2gy}$, entonces:

$$\Rightarrow \ T = \int_A^B \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$$

Ahora, por definición $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, y entonces:

$$\Rightarrow \ T = \int_A^B \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gy}} = \int_A^B \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gy}} dx \ \Rightarrow \ \boxed{T[y, y'] = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2gy}} dx}$$

b) Para encontrar la curva $y(x)$ que minimiza el funcional $T[y, y']$ abordaremos el ejercicio de la siguiente forma. Definimos el funcional $A(y, y')$ como:

$$A(y, y') = \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2gy}}$$

Y entonces, el funcional $T[y, y']$ se puede escribir como:

$$T[y, y'] = \int_{x_A}^{x_B} A(y, y') dx \qquad (3)$$

Ahora, para encontrar la curva $y(x)$ que minimiza[3] el funcional $T[y, y']$ (el tiempo entre los puntos A y B) debemos usar el *teorema fundamental del cálculo variacional*, el cual nos dice que:

$$\delta T = 0$$

[3] En realidad, puede corresponder a un mínimo o máximo.

Calculamos explícitamente la variación δT con la expresión (3):

$$\delta T = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial A}{\partial y}\delta y + \frac{\partial A}{\partial y'}\delta y' \right] dx = 0 \tag{4}$$

La meta es poder factorizar por δy o $\delta y'$, y...

$$I = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\partial A}{\partial y'}\delta y' dx \;\Rightarrow\; I = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\partial A}{\partial y'}\frac{d\delta y}{dx}dx$$

Usamos integración por partes:

$$u = \frac{\partial A}{\partial y'} \;\Rightarrow\; du = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial A}{\partial y'}\right)dx \quad ; \quad dv = \frac{d\delta y}{dx}dx \;\Rightarrow\; v = \delta y$$

$$\Rightarrow\; I = \left[\frac{\partial A}{\partial y'}\delta y\right]\Bigg|_{x_A}^{x_B} - \int_{x_A}^{x_B} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial A}{\partial y'}\right) dx\delta y dx$$

Como todas las curvas $y(x)$ posibles empiezan y terminan en x_A y x_B, entonces $\delta y(x_A) = \delta y(x_B) = 0$, y de esta forma el primer término de la expresión anterior es cero, y así:

$$\Rightarrow\; I = -\int_{x_A}^{x_B} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial A}{\partial y'}\right) dx\delta y dx$$

Y entonces, reemplazando en la expresión (4) y desarrollando, se tiene que:

$$\Rightarrow\; \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial A}{\partial y'}\right)\right] \delta q dx = 0$$

Entonces, se debe cumplir que:

$$\Rightarrow\; \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial A}{\partial y'}\right) = 0 \tag{5}$$

Esta ecuación es análoga a las *ecuaciones de Euler-Lagrange* que pueden recordar del curso de Vibraciones y Ondas (donde A sería el lagrangiano L). Cuando la función A no depende de derivadas de orden 2 o superiores de la curva $y(x)$, entonces A cumple la ecuación de Euler-Lagrange. Siguiendo un procedimiento similar es posible encontrar ecuaciones de Euler-Lagrange para casos donde A (o el lagrangiano) depende de derivadas de orden 2 o superior de la posición, como por ejemplo la aceleración[4].

Entonces, si usamos A en la expresión (5) será posible encontrar la ecuación diferencial para la curva $y(x)$ que resuelve el problema de la braquistócrona. Sin embargo, puede ser difícil trabajar las expresiones que tengamos que derivar en el proceso, por lo que en estos casos aplicamos la *identidad de Beltrami*[5], la cual nos dice que, en los casos $\partial_x A = 0$ (A no depende explícitamente de x), se cumple que:

$$A - \frac{\partial A}{\partial y'}y' = C \tag{6}$$

Con C una constante que caracteriza la familia de curvas que vamos a encontrar.

[4] Un buen ejercicio propuesto es encontrar una ecuación de este tipo para el caso hasta derivada n-ésima.

[5] Ver Anexo 1 para la demostración.

Entonces, derivando A con respecto a y', tenemos que:

$$\frac{\partial A}{\partial y'} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2gy}{1+(y')^2}}\frac{y'}{gy} \;\Rightarrow\; \frac{\partial A}{\partial y'} = \frac{y'}{2g}\sqrt{\frac{2g}{y(1+(y')^2)}}$$

Reemplazando en la expresión (6) junto con la expresión para A, se tiene que:

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}} - \frac{(y')^2}{2g}\sqrt{\frac{2g}{y(1+(y')^2)}} = C \;\Rightarrow\; \left(1+(y')^2\right)\sqrt{\frac{1}{2gy\,(1+(y')^2)}} - (y')^2\sqrt{\frac{1}{2gy\,(1+(y')^2)}} = C$$

$$\Rightarrow\; 1+(y')^2 = \frac{1}{2gC^2y} \;\Rightarrow\; \boxed{y' = \pm\sqrt{\frac{1}{2gC^2y} - 1}}$$

La solución a esta ecuación diferencial es la curva buscada.

c) Necesitamos encontrar $\frac{dy}{dx}$ en esta parametrización, para lo cual usamos lo siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}$$

El primer término de esta multiplicación puede obtenerse directamente desde la parametrización:

$$\frac{dy}{d\theta} = -\frac{1}{4gC^2}\sin(\theta)$$

Por otro lado, el término $\frac{d\theta}{dx}$ puede obtenerse si derivamos con respecto a x a ambos lados de $x(\theta)$:

$$\Rightarrow\; \frac{dx}{dx} = \frac{1}{4gC^2}\left(\frac{d\theta}{dx} - \cos(\theta)\frac{d\theta}{dx}\right) \;\Rightarrow\; \frac{d\theta}{dx} = \frac{4gC^2}{1-\cos(\theta)}$$

Entonces, juntando estas expresiones se tiene que:

$$\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)}$$

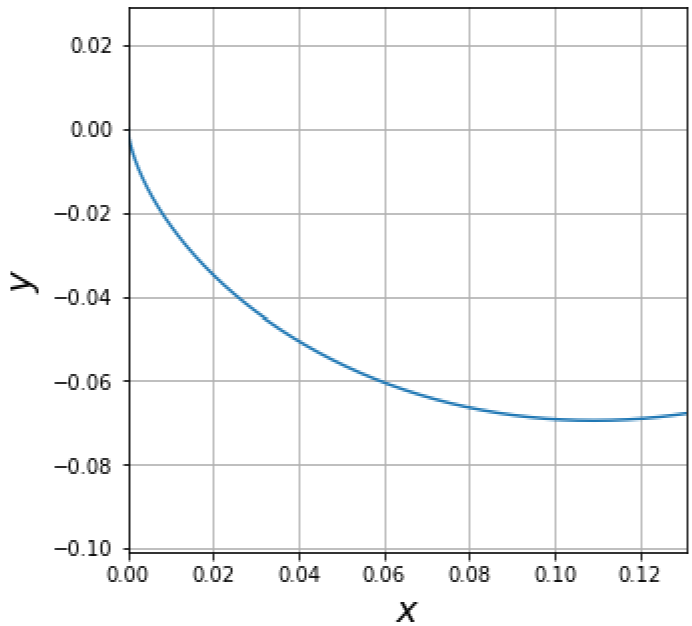
Elevando al cuadrado y sumando 1, desarrollamos para ver si cumple la ecuación diferencial:

$$1+(y')^2 = 1 + \left(\frac{-\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)}\right)^2 = \frac{1-2\cos(\theta)+\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}{(1-\cos(\theta))^2} = \frac{2(1-\cos(\theta))}{(1-\cos(\theta))^2}$$

$$\Rightarrow\; 1+(y')^2 = \frac{2}{1-\cos(\theta)} = \frac{2\frac{1}{4gC^2}}{\frac{1}{4gC^2}(1-\cos(\theta))} \;\Rightarrow\; \boxed{1+(y')^2 = \frac{1}{2gC^2y}}$$

Entonces, la cicloide es solución de nuestra ecuación diferencial, por lo tanto la braquistócrona es una cicloide.

Un ejemplo para una cicloide con $C = 1$ y $g = 10$ se muestra en la siguiente figura:



P2. Lagrangiano con 2da derivada temporal:

a) La acción de este sistema mecánico es:

$$S[L] = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, \ddot{x}) dt$$

Como en este caso el lagrangiano depende de la segunda derivada temporal de la coordenada generalizada, entonces no es posible usar la ecuación de Euler-Lagrange, puesto que esta suponde que el lagrangiano es una función de **a lo más** la derivada temporal de la coordenada generalizada.

Sin embargo, independiente de las derivadas temporales que estén en el lagrangiano, la partícula cumple el principio de mínima acción, con lo cual esta seguirá la trayectoria que minimize la acción S. En ese sentido, debemos imponer que $\delta S = 0$, y entonces:

$$\delta S = 0 \;\Rightarrow\; \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\delta \ddot{x} \right] dt = 0 \tag{7}$$

Para poder llegar a una ecuación tipo Euler-Lagrange necesitamos que todos los términos de la integral anterior estén multiplicados por δx, entonces manipularemos la integral asociada al segundo y tercer término. Partiendo por:

$$I_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d\delta x}{dt} dt$$

Usando integración por partes:

$$u = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \;\Rightarrow\; du = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) dt \quad ; \quad dv = \frac{d\delta x}{dt} dt \;\Rightarrow\; v = \delta x$$

$$\Rightarrow\; I_1 = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \right]\Bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) \delta x dt$$

El principio de mínima acción asume que nuestro sistema cumple la condición de **bordes fijos**, la cual nos dice que $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$, y entonces se tiene que:

$$I_1 = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) \delta x dt \tag{8}$$

Ahora hacemos el cálculo análogo con el término asociado a $\ddot{x}$:

$$I_2 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \delta \ddot{x} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \frac{d\delta \dot{x}}{dt} dt$$

Usando integración por partes:

$$u = \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \;\Rightarrow\; du = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\right) dt \quad ; \quad dv = \frac{d\delta \dot{x}}{dt} dt \;\Rightarrow\; v = \delta \dot{x}$$

$$\Rightarrow\; I_2 = \left[\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \delta \dot{x} \right]\Bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\right) \delta \dot{x} dt$$

Nuevamente por la condición de bordes fijos se tiene que $\delta\dot{x}(t_1) = \delta\dot{x}(t_2) = 0$, y así:

$$\Rightarrow \; I_2 = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\right)\delta\dot{x}dt \;\Rightarrow\; I_2 = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\right)\frac{d\delta x}{dt}dt$$

Integramos por parte nuevamente:

$$u = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\right) \;\Rightarrow\; du = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\right)dt \quad ; \quad dv = \frac{d\delta x}{dt}dt \;\Rightarrow\; v = \delta x$$

$$\Rightarrow \; I_2 = -\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\right)\delta x\right]\Bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\right)\delta x dt$$

Nuevamente, por condición de bordes fijos se debe cumplir que $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$, y entonces:

$$\Rightarrow \; I_2 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\right)\delta x dt \tag{9}$$

Entonces, reemplazando las expresiones (8) y (9) en la expresión (7) y agrupando, se tiene:

$$\Rightarrow \; \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\right)\right]\delta x dt = 0$$

Como $\delta x \neq 0$, la única forma de que esta integral sea cero es que se cumpla:

$$\Rightarrow \; \boxed{\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\right) = 0}$$

Que corresponde a una ecuación equivalente a Euler-Lagrange para determinar la ecuación de movimiento en casos donde el lagrangiano dependa a lo más de la 2da derivada temporal de la coordenada generalizada.

b) Se tiene el lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 - \alpha\ddot{x}^2$$

Calculemos los términos de la expresión encontrada en la parte anterior de la pregunta:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = kx \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} = -2\alpha\ddot{x} \;\Rightarrow\; \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\right) = -2\alpha\ddddot{x}$$

Entonces, reemplazando:

$$\Rightarrow \; kx - m\ddot{x} - 2\alpha\ddddot{x} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\ddddot{x} + \frac{m}{2\alpha}\ddot{x} - \frac{k}{2\alpha}x = 0}$$

Con lo cual se obtuvo la ecuación de movimiento de la partícula descrita por el lagrangiano entregado.

P3. Principio de mínima acción para densidad lagrangiana:

Una de las grandes ventajas del principio de mínima acción es que se no sólo se cumple para problemas relacionados a partículas y/o sistemas de partículas en movimiento, sino que se cumple para cualquier sistema que pueda ser modelado a través de una *densidad lagrangiana*, donde usamos como coordenadas generalizadas los distintos campos que se involucran en el sistema. En ese sentido, las ecuaciones que rigen la hidrodinámica de un fluido ideal incompresible pueden obtenerse como "ecuaciones de movimiento" a partir de la acción definida por la densidad lagrangiana que se nos da en el enunciado para este fluido ideal[6].

La cantidad $\mathcal{L}$ corresponde a lagrangiano por unidad de volumen, y entonces para escribir la acción $S[L]$ (que es función del lagrangiano) debemos integrar en el volumen, así:

$$S[L] = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \left[\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 - \rho e(\rho) + \phi \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right) \right] d^3r dt$$

Para encontrar las ecuaciones de movimiento variamos la acción, y entonces:

$$\delta S = 0 \;\Rightarrow\; \int_{t_1}^{t_2} \int_V \sum_{\xi_i} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} \delta\xi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} \delta\dot{\xi} \right] d^3r dt \tag{10}$$

Donde ξ puede ser ϕ o ρ, según corresponda. Probando para ϕ, se tiene que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\delta\dot{\phi} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) \right) \delta\phi \tag{11}$$

Ahora para ρ:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho}\delta\rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}}\delta\dot{\rho} = \left(\frac{1}{2}\vec{v}^2 - e(\rho) + \rho\frac{\partial e}{\partial \rho} \right) \delta\rho + \phi\nabla \cdot (\delta\rho\vec{v}) + \phi\delta\dot{\rho}$$

Usando la identidad vectorial $\nabla \cdot (\phi\delta\rho\vec{v}) = (\nabla\phi) \cdot \delta\rho\vec{v} + \phi\nabla \cdot (\delta\rho\vec{v})$ junto con el hecho de que $\nabla \cdot (\phi\delta\rho\vec{v})$ integrado en el volumen es cero[7], nos damos cuenta de que podemos reemplazar $\phi\nabla \cdot (\delta\rho\vec{v})$ por $-(\nabla\phi) \cdot \delta\rho\vec{v}$, y entonces:

$$\Rightarrow\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho}\delta\rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}}\delta\dot{\rho} = \left(\frac{1}{2}\vec{v}^2 - e(\rho) + \rho\frac{\partial e}{\partial \rho} - (\nabla\phi) \cdot \vec{v} \right) \delta\rho + \phi\delta\dot{\rho}$$

En esta expresión, al momento de integrar con respecto al tiempo hacemos el truco de la integración por partes, que es equivalente a decir que $\phi\delta\dot{\rho} = -\dot{\phi}\delta\rho$, y entonces:

$$\Rightarrow\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho}\delta\rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}}\delta\dot{\rho} = \left(\frac{1}{2}\vec{v}^2 - e(\rho) + \rho\frac{\partial e}{\partial \rho} - (\nabla\phi) \cdot \vec{v} - \dot{\phi} \right) \delta\rho \tag{12}$$

Entonces, reemplazando en (10) lo encontrado en (11) y (12), se tiene que:

$$\delta S = 0 \;\Rightarrow\; \int_{t_1}^{t_2} \int_V \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) \right) \delta\phi + \left(\frac{1}{2}\vec{v}^2 - e(\rho) + \rho\frac{\partial e}{\partial \rho} - (\nabla\phi) \cdot \vec{v} - \dot{\phi} \right) \delta\rho \right] d^3dt = 0$$

[6] Otro ejemplo que puede abordarse así es la obtención de las ecuaciones de Maxwell a partir de la densidad lagrangiana del campo electromagnético.

[7] Por teorema de la divergencia, al integrar en un volumen nos queda $\delta\rho$(borde), el cual por condición de extremos fijos da cero.

Como ϕ y ρ son "coordenadas generalizadas" entonces las variaciones $\delta\phi$ y $\delta\rho$ son linealmente independientes, y entonces para que se cumpla la igualdad anterior debe cumplirse que:

$$\Rightarrow \ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad ; \quad \frac{1}{2}\vec{v}^2 - e(\rho) + \rho \frac{\partial e}{\partial \rho} - (\nabla \phi) \cdot \vec{v} - \dot{\phi} = 0$$

Multiplicando por ρ a ambos lados de la segunda expresión, y escribiendo la definición de presión que se nos da en el enunciado, se tiene que:

$$\Rightarrow \ \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad ; \quad \frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 - \rho e(\rho) + P(\rho) - \rho(\nabla \phi) \cdot \vec{v} - \rho\dot{\phi} = 0}$$

La primera expresión corresponde a la **ecuación de continuidad**, mientras que la segunda expresión es la **ecuación de Euler** para un fluido.

* **Anexo 1: Demostración de la identidad de Beltrami:**

Partiendo de la ecuación (5), si multiplicamos toda la expresión por y', entonces se tiene que:

$$\Rightarrow \ \frac{\partial A}{\partial y}y' - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial A}{\partial y'}\right)y' = 0 \ \Rightarrow \ \frac{\partial A}{\partial y}y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial A}{\partial y'}\right)y' \tag{13}$$

Ahora, si consideramos la derivada total de A con respecto a la variable x, por definición de esta derivada se tiene que:

$$\frac{dA}{dx} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y}y' + \frac{\partial A}{\partial y'}y'' \tag{14}$$

Reemplazando la expresión (13) en la expresión (14), se tiene que:

$$\Rightarrow \ \frac{dA}{dx} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial A}{\partial y'}\right)y' + \frac{\partial A}{\partial y'}y''$$

Los dos últimos términos se pueden juntar en una sola derivada total con respecto a x, entonces:

$$\Rightarrow \ \frac{dA}{dx} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial A}{\partial y'}y'\right) \ \Rightarrow \ \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{d}{dx}\left(A - \frac{\partial A}{\partial y'}y'\right)$$

Ahora, en el caso $\partial_x A = 0$, se tiene que:

$$\Rightarrow \ \frac{d}{dt}\left(A - \frac{\partial A}{\partial y'}y'\right) = 0 \ \Rightarrow \ \boxed{A - \frac{\partial A}{\partial y'}y' = C \quad ; \quad C \in \mathbb{R}}$$

Esta identidad será de mucha ayuda más adelante cuando se desee conectar el *lagrangiano* L con el *hamiltoniano* H, donde en los casos $\partial_t L = 0$ se cumple la relación:

$$H = L - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i$$