FI3101-1 Mecánica Clásica.
Profesor: Marcel Clerc.
Auxiliares: Roberto Gajardo, David Pinto.

Auxiliar 11: Paréntesis de Poisson y Sistemas Hamiltonianos.

15 de Diciembre del 2020

P1. Dinámica de vórtices:

a) Muestre que la evolución temporal de q_l y p_l en un sistema hamiltoniano puede escribirse usando el paréntesis de Poisson, donde:

$$\{H, q_l\} = \dot{q}_l \quad ; \quad \{H, p_l\} = \dot{p}_l$$

b) Considere el siguiente hamiltoniano, el cual describe el movimiento de vórtices sobre un fluido unidimensional:

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2\mu} - \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} \gamma_i\gamma_j \ln|r_i - r_j|$$

Donde las constantes γ_i dan cuenta de la intensidad de interacción entre vórtices, μ es un parámetro que modela la inercia, y r_i hace referencia a la posición del i-ésimo vórtice. Encuentre las ecuaciones de Hamilton para el l-ésimo vórtice, y a partir de estas encuentre su ecuación de movimiento.

P2. Movimiento orbital:

Considere un objeto de masa m orbitando bajo una fuerza central modelada con el potencial:

$$V(r) = \frac{\gamma}{r}$$

a) Encuentre el hamiltoniano del sistema $H(q_i, p_i)$ y las ecuaciones de movimiento asociadas (ecuaciones de Hamilton).

b) Se define el vector de Laplace-Runge-Lenz $\vec{A}$ como:

$$\vec{A} = \frac{1}{m}\left(\vec{p}\times\vec{L}\right) + \frac{\gamma}{r}\vec{r}$$

Donde L es el momento angular, y $\vec{p}$ y $\vec{r}$ están representados en coordenadas cartesianas. Usando paréntesis de Poisson muestre que este vector es una cantidad conservada del sistema.

P3. Cantidad conservada dependiente del tiempo:

Considere un sistema mecánico modelado por el siguiente hamiltoniano:

$$H = xp_x - yp_y + ax^2 + by^2$$

Donde a y b son constantes. Muestre que las siguientes cantidades son cantidades conservadas del sistema:

$$f_1 = \frac{p_y - by}{x} \quad ; \quad f_2 = xy \quad ; \quad f_3 = xe^{-t}$$