FI3101-1 Mecánica Clásica.
Profesor: Marcel Clerc.
Auxiliares: Roberto Gajardo, David Pinto.

Pauta Auxiliar 11: Paréntesis de Poisson y Sistemas Hamiltonianos.

15 de Diciembre del 2020

P1. Dinámica de vórtices:

a) Las ecuaciones de Hamilton para la coordenada q_l y momentum p_l son:

$$\frac{\partial H}{\partial q^l} = -\dot{p}_l \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial p^l} = \dot{q}_l \tag{1}$$

La definición[1] de paréntesis de Poisson es:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q^i} \right]$$

Si usamos $f = H$, se tiene que:

$$\Rightarrow \ \{H, g\} = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right]$$

Notemos que al reemplazar g por q_l o p_l encontramos otra forma de escribir las ecuaciones de Hamilton mostradas en (1):

$$\{H, q_l\} = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial q_l}{\partial q^i} - \frac{\partial q_l}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right] = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta_{il} = \frac{\partial H}{\partial p^l} = \dot{q}_l$$

$$\{H, p_l\} = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_l}{\partial q^i} - \frac{\partial p_l}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right] = -\sum_{i=1}^{N} \delta_{il} \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q^l} = \dot{p}_l$$

Entonces el paréntesis de Poisson nos entrega una forma compacta de escribir la evolución temporal[2] de q_l y p_l, ya que:

$$\{H, q_l\} = \dot{q}_l \quad ; \quad \{H, p_l\} = \dot{p}_l$$

b) Tenemos el hamiltoniano:

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2\mu} - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \gamma_i \gamma_j \ln |r_i - r_j|$$

[1] En Wikipedia (`https://es.wikipedia.org/wiki/Corchete_de_Poisson`) la definición tiene un signo invertido.
[2] En realidad la igualdad $\{H, \alpha\} = \dot{\alpha}$ es válida para cualquier cantidad $\alpha(q_i, p_i)$ que no dependa explícitamente del tiempo. La demostración puede verse en la sección "Paréntesis de Poisson" del libro de Mecánica de Landau y Lifshitz.

Partiremos calculando la derivada con respecto al momentum p_l del l-ésimo vórtice para encontrar $\dot{r}_l$, entonces:

$$\dot{r}_l = \frac{\partial H}{\partial p^l} = \frac{\partial}{\partial p^l}\left[\sum_i \frac{p_i^2}{2\mu}\right]$$

Al derivar esta suma sólo sobrevive el término asociado al l-ésimo vórtice, y entonces:

$$\Rightarrow \boxed{\dot{r}_l = \frac{p_l}{\mu}} \tag{2}$$

Ahora calculamos la derivada con respecto a la posición r_l para encontrar $\dot{p}_l$:

$$\dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial r^l} = -\frac{\partial}{\partial r^l}\left[-\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\gamma_i\gamma_j \ln|r_i - r_j|\right] = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\gamma_i\gamma_j\frac{\partial}{\partial r^l}\left[\ln|r_i - r_j|\right]$$

$$\Rightarrow\ \dot{p}_l = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{\gamma_i\gamma_j}{|r_i - r_j|}\frac{\partial}{\partial r^l}\left[|r_i - r_j|\right]$$

Usamos la definición de valor absoluto $|r_i - r_j| = \sqrt{(r_i - r_j)^2}$ junto con la regla de la cadena para calcular la derivada, y entonces:

$$\Rightarrow\ \dot{p}_l = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{\gamma_i\gamma_j}{|r_i - r_j|}\frac{1}{2}\frac{2(r_i - r_j)}{|r_i - r_j|}\frac{\partial}{\partial r^l}(r_i - r_j)$$

$$\Rightarrow\ \dot{p}_l = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\gamma_i\gamma_j\frac{(r_i - r_j)}{|r_i - r_j|^2}(\delta_{il} - \delta_{jl}) = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\gamma_i\gamma_j\frac{(r_i - r_j)}{|r_i - r_j|^2}\delta_{il} - \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\gamma_i\gamma_j\frac{(r_i - r_j)}{|r_i - r_j|^2}\delta_{jl}$$

$$\Rightarrow\ \dot{p}_l = \frac{1}{2}\sum_{j\neq l}\gamma_l\gamma_j\frac{(r_l - r_j)}{|r_l - r_j|^2} - \frac{1}{2}\sum_{i\neq l}\gamma_i\gamma_l\frac{(r_i - r_l)}{|r_i - r_l|^2}$$

Notamos que al cambiar j por i en la primera suma, e invirtiendo los términos en el numerador de la segunda suma, entonces las sumas son idénticas, y de esta forma se obtiene finalmente:

$$\Rightarrow \boxed{\dot{p}_l = \sum_{i\neq l}\gamma_l\gamma_i\frac{(r_l - r_i)}{|r_l - r_i|^2}} \tag{3}$$

Ahora, notemos que al derivar temporalmente la expresión (2) obtenemos:

$$\ddot{r}_l = \frac{\dot{p}_l}{\mu}$$

Reemplazando esto en la expresión (3) obtenemos la ecuación de movimiento para la posición del l-ésimo vórtice:

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{r}_l = \frac{1}{\mu}\sum_{i\neq l}\gamma_l\gamma_i\frac{(r_l - r_i)}{|r_l - r_i|^2}}$$

Con esto podemos interpretar el lado derecho como la fuerza que siente el l-ésimo vórtice a partir de la interacción con el resto de vórtices en el sistema.

P2. <u>Movimiento orbital</u>:

a) Como el movimiento es a causa de una fuerza central, entonces podemos asumir que el movimiento será en el plano, con lo cual el lagrangiano en coordenadas polares será:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{\gamma}{r}$$

Con esto el hamiltoniano se calcula a partir de la expresión (en notación de Einstein):

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L$$

Entonces:

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\dot{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} - L \;\Rightarrow\; H = m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{\gamma}{r}$$

$$\Rightarrow\; H = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{\gamma}{r} \tag{4}$$

Si queremos usar el formalismo de las ecuaciones de Hamilton, necesitamos que esta cantidad esté en función de los momentos y no de las velocidades, por lo tanto buscamos estas últimas en función de p_r y p_θ:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \;\Rightarrow\; \dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \;\Rightarrow\; \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

Entonces, reemplazando en (4) se obtiene finalmente H en función de las coordenadas y momentos:

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{\gamma}{r}}$$

Ahora buscamos las ecuaciones de Hamilton. Partiendo por la coordenada r:

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} \;\Rightarrow\; \boxed{\dot{r} = \frac{p_r}{m}} \quad ; \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} \;\Rightarrow\; \boxed{\dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{\gamma}{r^2}}$$

Ahora con la coordenada θ:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} \;\Rightarrow\; \boxed{\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}} \quad ; \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \;\Rightarrow\; \boxed{\dot{p}_\theta = 0}$$

Notamos que las primeras expresiones son simplemente lo encontrado más arriba, mientras que las segundas expresiones dan cuenta de la 2da ley de Newton en cada coordenada, y en particular notamos que el momento p_θ se conserva (lo cual no es nada nuevo para este problema). Si queremos encontrar la ecuación de movimiento en la coordenada r, basta con derivar temporalmente la expresión para $\dot{r}$ y reemplazar lo encontrado para $\dot{p}_r$, con lo cual se obtiene:

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{r} = \frac{p_\theta^2}{m^2r^3} + \frac{\gamma}{mr^2}}$$

b) El paréntesis de Poisson nos otorga una forma compacta de escrbir una condición para las cantidades conservadas de un sistema. Tal como se mencionó en un pie de página anteriormente, si una cantidad $\alpha(q_i, p_i)$ no depende explícitamente del tiempo[3], entonces se cumple que $\dot{\alpha} = \{H, \alpha\}$. En particular, si α es una cantidad conservada, entonces $\dot{\alpha} = 0$, y de esta forma la condición para que α sea una cantidad conservada, escrita con el paréntesis de Poisson, es:

$$\{H, \alpha\} = 0$$

Entonces si queremos demostrar que el vector de Laplace-Runge-Lenz es una cantidad conservada, basta con demostrar que $\{H, \vec{A}\} = 0$. Por la forma en que está escrito el vector $\vec{A}$, lo mejor es usar coordenadas rectangulares para este cálculo, donde nos apoyaremos en la notación de Einstein. En esta notación y con estas coordenadas el hamiltoniano es:

$$H = \frac{p_s p^s}{2m} + \frac{\gamma}{\sqrt{r_s r^s}} \tag{5}$$

Si usamos notación de Einstein basta demostrar la condición con el paréntesis de Poisson para una componente arbitraria de $\vec{A}$, es decir, basta con demostrar que $\{H, A_i\} = 0$. Esta componente puede escribirse como:

$$A_i = \frac{1}{m}\varepsilon_{ijk} p_j L_k + \frac{\gamma}{\sqrt{r_s r^s}} r_i$$

Donde se usó la identidad $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$, con ε_{ijk} el tensor de Levi-Civita[4]. Recordamos que por definición de momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, por lo tanto la componente L_k puede escribirse como $L_k = \varepsilon_{klm} r_l p_m$, y reemplazando:

$$\Rightarrow \;\; A_i = \frac{1}{m}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} p_j r_l p_m + \frac{\gamma}{\sqrt{r_s r^s}} r_i$$

Usamos la identidad $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$, y entonces:

$$\Rightarrow \;\; A_i = \frac{1}{m}\left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right) p_j r_l p_m + \frac{\gamma}{\sqrt{r_s r^s}} r_i$$

Desarrollamos contrayendo aquellos ínices asociados a las deltas, y entonces:

$$\Rightarrow \;\; A_i = \frac{1}{m}\left(r_i p_j p^j - p_i r_j p^j\right) + \frac{\gamma}{\sqrt{r_s r^s}} r_i \tag{6}$$

Con las expresiones (5) y (6) podemos calcular el paréntesis de Poisson $\{H, A_i\}$ definido por:

$$\{H, A_i\} = \sum_j \left[\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial A_i}{\partial r^j} - \frac{\partial A_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial r^j}\right]$$

Para el hamiltoniano:

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{p_j}{m} \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial r^j} = -\frac{\gamma r_j}{(r_s r^s)^{\frac{3}{2}}}$$

[3]El caso de dependencia explícita en el tiempo se aborda en la P3.

[4]`https://es.wikipedia.org/wiki/S%C3%ADmbolo_de_Levi-Civita`

Por otro lado, para la componente[5] A_i:

$$\frac{\partial A_i}{\partial r^j} = \frac{1}{m}(p_s p^s \delta_{ij} - p_i p_j) + \frac{\gamma}{\sqrt{r_s r^s}}\delta_{ij} - \frac{\gamma r_i r_j}{(r_s r^s)^{\frac{3}{2}}} \quad ; \quad \frac{\partial A_i}{\partial p_j} = \frac{1}{m}(2r_i p_j - \delta_{ij} r_s p^s - p_i r_j)$$

Donde se cambiaron algunos índices contraídos para no repetir 3 veces el mismo índice en una sola expresión. Multiplicamos correspondientemente para obtener los dos términos de la suma:

$$\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial A_i}{\partial r^j} = \frac{1}{m^2}\left(p_s p^s \delta_{ij} p_j - p_i p_j p^j\right) + \frac{\gamma}{m}\frac{\delta_{ij} p_j}{\sqrt{r_s r^s}} - \frac{\gamma}{m}\frac{r_i r_j p^j}{(r_s r^s)^{\frac{3}{2}}}$$

Contraemos las deltas y notamos que con esto el término entre paréntesis se anula, entonces:

$$\Rightarrow \; \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial A_i}{\partial r^j} = \frac{\gamma}{m}\frac{p_i}{\sqrt{r_s r^s}} - \frac{\gamma}{m}\frac{r_i r_j p^j}{(r_s r^s)^{\frac{3}{2}}}$$

Ahora calculamos el otro término de la suma:

$$\frac{\partial A_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial r^j} = -\frac{\gamma}{m(r_s r^s)^{\frac{3}{2}}}\left(2r_i p_j r^j - \delta_{ij} r_j r_s p^s - p_i r_j r^j\right)$$

Al contraer la delta notamos que el primer término dentro del paréntesis es el doble del segundo, mientras que la contracción de $r_j r^j$ la escribiremos como $r_s r^s$ para hacer más evidente el cálculo posterior, y entonces:

$$\frac{\partial A_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial r^j} = -\frac{\gamma}{m(r_s r^s)^{\frac{3}{2}}}\left(r_i p_j r^j - p_i r_s r^s\right) \;\Rightarrow\; \frac{\partial A_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial r^j} = -\frac{\gamma}{m}\frac{r_i r_j p^j}{(r_s r^s)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\gamma}{m}\frac{p_i}{\sqrt{r_s r^s}}$$

Notamos que los dos términos que acabamos de calcular son exactamente iguales, y como la definición de paréntesis de Poisson nos pide que restemos estas cantidades, entonces se concluye que:

$$\Rightarrow \; \{H, A_i\} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\{H, \vec{A}\} = 0}$$

Entonces, el vector de Laplace-Runge-Lenz $\vec{A}$ es una cantidad conservada del sistema[6].

[5] Una ayuda para derivar expresiones con índices contraídos es pensar en su forma vectorial. Por ejemplo, el término $r_j p^j$ hace referencia al producto punto $\vec{r}\cdot\vec{p}$, y entonces al derivar por r^j tiene que sobrevivir esa componente de $\vec{p}$ (es decir, p_j). De la misma forma funciona con otros términos contraídos.

[6] En la página `https://analyticphysics.com/Runge%20Vector/The%20Symmetry%20Corresponding%20to%20the%20Runge%20Vector.htm` se encuentra una discusión sobre la simetría asociada a esta cantidad conservada.

P3. Cantidad conservada dependiente del tiempo:

De las preguntas anteriores de este auxiliar sabemos que para una cantidad α **que no dependa explícitamente del tiempo** la condición de ser una cantidad conservada puede escribirse con el paréntesis de Poisson en la forma $\{H, \alpha\} = 0$. Esta condición nos servirá para demostrar que f_1 y f_2 son cantidades conservadas, ya que justamente no dependen explícitamente del tiempo. Por la definición de paréntesis de Poisson necesitaremos las siguientes cantidades, que corresponden a las derivadas de H con respecto a las coordenadas y momentos:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = p_x - 2ax \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial p_x} = x \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -p_x + 2by \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial p_y} = -y$$

Entonces, partiendo por f_1, calculemos las mismas derivadas:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{(p_y - by)}{x^2} \quad ; \quad \frac{\partial f_1}{\partial p_x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{b}{x} \quad ; \quad \frac{\partial f_1}{\partial p_y} = \frac{1}{x}$$

Entonces:

$$\{H, f_1\} = \sum_{i=1}^{2} \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f_1}{\partial q^i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right] = -x\frac{(p_y - by)}{x^2} + \frac{by}{x} - \frac{(p_y + 2by)}{x}$$

$$\Rightarrow \; \{H, f_1\} = \frac{1}{x}(-p_y + by + by + p_y - 2by) \;\Rightarrow\; \boxed{\{H, f_1\} = 0}$$

Con lo cual se demuestra que f_1 es una cantidad conservada de sistema. Ahora para f_2:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = y \quad ; \quad \frac{\partial f_2}{\partial p_x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = x \quad ; \quad \frac{\partial f_2}{\partial p_y} = 0$$

Entonces:

$$\{H, f_2\} = \sum_{i=1}^{2} \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f_2}{\partial q^i} - \frac{\partial f_2}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right] = xy - yx \;\Rightarrow\; \boxed{\{H, f_2\} = 0}$$

Con lo cual queda demostrado que f_2 también es una cantidad conservada del sistema.

Ahora, para el caso de f_3 la condición $\{H, \alpha\} = 0$ ya no es válida, ya que f_3 depende explícitamente del tiempo. Para poder encontrar una condición más general, es decir, que admita cantidades $\alpha(q_i, p_i, t)$ que dependen explícitamente del tiempo, partamos por la derivada total de esta cantidad:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \sum_i \left[\frac{\partial \alpha}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \alpha}{\partial p_i}\dot{p}_i \right]$$

Podemos reemplazar $\dot{q}_i$ y $\dot{p}_i$ por lo que nos entrega las ecuaciones de Hamilton, y entonces:

$$\Rightarrow \; \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \sum_i \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial \alpha}{\partial q^i} - \frac{\partial \alpha}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right]$$

Notamos que la última expresión corresponde a la definición de paréntesis de Poisson, entonces:

$$\Rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \{H, \alpha\}$$

La condición de que la cantidad α se conserve es que su derivada total en el tiempo sea nula, entonces con esto se obtiene la condición general válida para cantidades α que pueden o no depender explícitamente del tiempo[7]:

$$\Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \{H, \alpha\} = 0$$

Ahora vemos si la cantidad f_3 cumple esta condición. Se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -xe^{-t} \quad ; \quad \frac{\partial f_3}{\partial x} = e^{-t} \quad ; \quad \frac{\partial f_3}{\partial p_x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f_3}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f_3}{\partial p_y} = 0$$

Entonces reemplazando:

$$\frac{\partial f_3}{\partial t} + \{H, \alpha\} = \frac{\partial f_3}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2} \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f_3}{\partial q^i} - \frac{\partial f_3}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right] = -xe^{-t} + xe^{-t} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f_3}{\partial t} + \{H, f_3\} = 0}$$

Entonces, se demuestra que la cantidad f_3 también es una cantidad conservada del sistema.

[7] El caso que trabajamos hasta ahora (sin dependencia explícita) se obtiene al decir que $\frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0$.