Aux 4: Relatividad especial en nuevos términos

- Recordemos que usando la notación β, γ podemos escribir las transformaciones de Lorentz de una forma compacta, mostrando de mejor forma su verdadera naturaleza (rotación)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\Delta t' \\ \Delta x' \end{pmatrix}$$

- También habíamos definido una nueva regla de transformación de velocidades, donde si tenemos una velocidad $u' = u_x' \hat{x}$ medida en un sist móvil que se mueve a una velocidad v relativa a uno fijo, la velocidad u' en el sistema fijo será:

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \beta u_x'/c}, \quad u_y = \frac{u_y'}{\gamma(1 + \beta \frac{u_x'}{c})}, \quad u_z = \frac{u_z'}{\gamma(1 + \beta \frac{u_x'}{c})}$$

- Vamos a comenzar a usar la notación covariante (4-D) donde:

$$x^0 \equiv ct, \quad x^i \equiv x, y, z$$

Donde el intervalo espacio-tiempo lo escribimos como:

$$-\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$$

Con

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Métrica plana o de Minkowski

2 observaciones:

- Usamos la regla de Einstein para los índices repetidos
$$P_\mu x^\mu = P_0 x^0 + P_1 x^1 + P_2 x^2 + P_3 x^3$$
- Una convención es que las letras griegas van de 0-3, mientras que las latinas de 1-3.

• Con la notación covariante y la regla de Einstein, una transformación de Lorentz se escribe como

$$X^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu'} X^{\nu'}$$

Donde $\Lambda^{\mu}{}_{\nu'} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}$

El índice que va arriba es el sistema hacia el cual queremos llegar (μ) y el que está abajo es el que estamos transformando (μ')

• Notemos que esta forma de transformar la 4-posición es muy sencilla y conveniente. Nos gustaría que las cantidades físicas interesantes transformaran de la misma forma.

Lamentablemente la 3-velocidad $\vec{u}$ no sigue esta conveniente regla de transformación

• Vamos a definir una cantidad análoga a la velocidad pero en 4-D que transforme de manera apropiada (como la 4-posición). Definimos la 4-velocidad (o velocidad propia):

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}$$

Donde τ es el tiempo propio, definido por $d\tau = \sqrt{-ds^2} = \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}}$, como es función del intervalo espacio-tpo el tiempo propio es invariante

$\Rightarrow$ La 4-vel transforma como la posición: $u^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} u^{\nu}$

• Si escribimos el tiempo propio como:

$$d\tau = \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}} = dt \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{dt} \frac{dx^{\nu}}{dt}} = dt \sqrt{1 - v^2}$$

La relación de la 4-velocidad con la velocidad "normal" $\vec{v}$ es

$$u^{\mu} = \gamma (1, v^{i})$$

P1 | Diagramas de Minkowski

- Vamos a estudiar dos problemas con diagramas de Minkowski

a) Tenemos una nave que sale de la tierra con velocidad $\frac{3c}{5}$. Cuando en la nave pasa una hora lanza una señal de luz a la tierra

- De acuerdo a la tierra, ¿Cuándo fue enviada la señal?

  Definimos el evento A: la nave lanzo la señal

$$t_A = \gamma\left(t_A' + \frac{v}{c^2}\cancel{x_A'}^{\,0}\right) \Rightarrow t_A = \gamma t_A' \quad ; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{9}{25}}} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{t_A = 5/4\ hr}$$

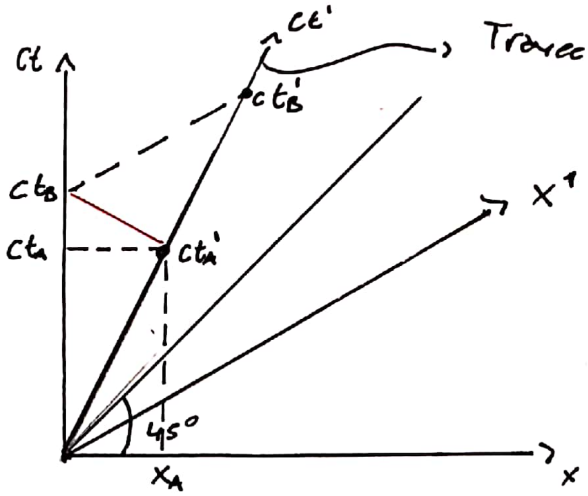
- De acuerdo a la tierra ¿Cuánto tiempo transcurre entre que la nave envía la señal hasta que llega a la Tierra (t_B)?

$$t_B = t_A + \frac{x_A}{c} = t_A + \frac{v t_A}{c} = t_A(1 + 3/5) = 2hr$$

- De acuerdo a la nave ¿Cuanto tiempo transcurre hasta que la señal llegue a la tierra?

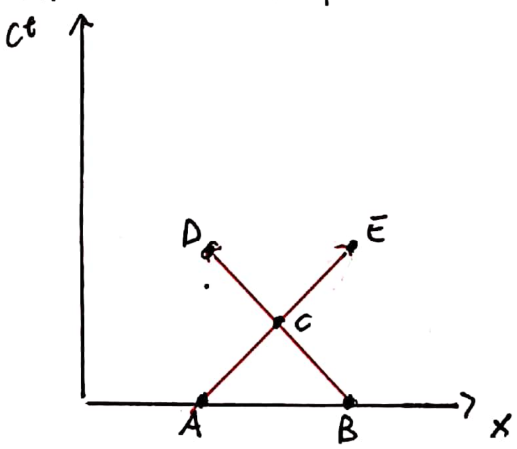
$$t_B' = \gamma\left(t_B - \frac{v}{c}\cancel{x_B}^{\,0}\right) = \gamma t_B = 5/4 \cdot 2hr \approx 2.5\ hr$$

• Diagrama de Minkowski:

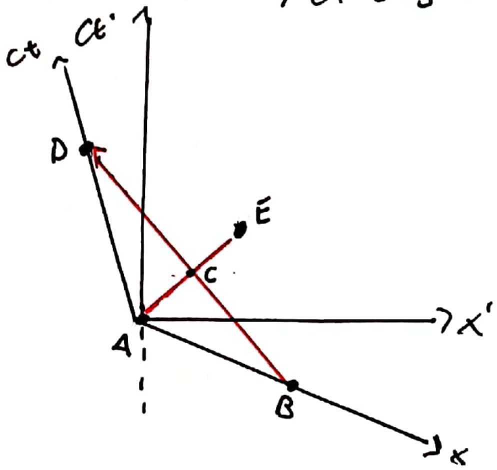


b) Tenemos dos fuentes de luz ubicadas a una distancia $2L_0$ en un sistema fijo. En un cierto momento, las fuentes se encienden (Eventos A y B) simultaneamente lanzando rayos de luz en sentidos opuestos, se intersectan en el evento C y llegan al mismo tiempo al otro lado (eventos D y E)

• De acuerdo a un observador fijo tendremos el siguiente diagrama.



• De acuerdo a un observador que se mueve con velocidad +V relativa al fijo, el diagrama será



• Para este observador, el orden de los eventos será; B, A, C, E, D

P2] Suma de velocidades

- Vamos a mostrar algo que es muy obvio en la notación hiperbólica para la suma de velocidades

a) Mostrar que si tenemos n sistemas inerciales que se mueven con velocidad relativa β entre si. La velocidad del sist n respecto al i-esimo sistema será:

$$\beta_{n-i} = \frac{(1+\beta)^i - (1-\beta)^i}{(1+\beta)^i + (1-\beta)^i} \quad \star$$

- Usando inducción, el caso base es trivial ya que $\beta_n = 0$ (velocidad del sist n respecto a si mismo). Mostraremos que a partir de $\star$ podemos obtener $\beta_{n-(i+1)}$, usamos la suma de velocidades

$$\beta_{n-(i+1)} = \frac{\beta_{n-1} + \beta}{1 + \beta\beta_{n-1}} = \frac{\frac{(1+\beta)^i - (1-\beta)^i}{(1+\beta)^i + (1-\beta)^i} + \beta}{1 + \frac{\beta[(1+\beta)^i - (1-\beta)^i]}{(1+\beta)^i + (1-\beta)^i}}$$

$$= \frac{(1+\beta)^i - (1-\beta)^i + \beta[(1+\beta)^i + (1-\beta)^i]}{(1+\beta)^i + (1-\beta)^i + \beta[(1+\beta)^i - (1-\beta)^i]}$$

$$= \frac{(1+\beta)^{i+1} - (1-\beta)^{i+1}}{(1+\beta)^{i+1} + (1-\beta)^{i+1}} \quad //$$

- Luego la velocidad del n-ésimo sist de referencia respecto a uno fijo será:

$$\beta_0 = \beta_{n-n} = \frac{(1+\beta)^n - (1-\beta)^n}{(1+\beta)^n + (1-\beta)^n}$$

b) ¿Qué ocurre si tenemos infinitos sistemas de referencia?

- Podemos notar que $\lim_{n\to\infty} \frac{(1+\beta)^n - (1-\beta)^n}{(1+\beta)^n + (1-\beta)^n} = 1$

Con infinitos sistemas, la vel máxima sigue siendo c

- En la notación hiperbólica esto es obvio ya que la velocidad medida en el sistema fijo será:

$$\beta_0 = \operatorname{tgh}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \phi_i\right) \quad ; \text{ Con } \phi_i \equiv \operatorname{Arctgh}(\beta_i)$$

- Pero la tangente hiperbólica está acotada por 1.

P3 | Velocidad propia

Un objeto se mueve formando un ángulo de 45° en un sistema fijo S con una velocidad de $2/\sqrt{5}\, c$

a) Encontrar V_x y V_y componentes de la veloc. tradicional y U_x y U_y comp. de la velocidad propia.

- Para V_x y V_y proyectamos directamente: $V_x = V_y = V\cos(45°)$

$$\Rightarrow \boxed{V_x = V_y = \sqrt{\tfrac{2}{5}}\, c}$$

- Usamos la definición de 4-velocidad: $u^i = \gamma v^i$

$$\Rightarrow U_x = U_y = \gamma \sqrt{\tfrac{2}{5}}\, c \qquad \Big|\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{5}}} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{U_x = U_y = \sqrt{2}\, c} \rightarrow \underline{OJO}$$

Los componentes de la 4-vel pueden ser mayores que c.

b) Calcular u^0

- Usamos la definición $u^0 = \gamma c = \boxed{\sqrt{5}\, c}$

c) Tenemos un sistema $\tilde{S}$ que se mueve con velocidad $\sqrt{\tfrac{2}{5}}\, c$ relativa a S, encontrar $\tilde{V}_x$, $\tilde{V}_y$, $\tilde{u}_x$ y $\tilde{u}_y$

- Para encontrar $\tilde{V}_x$ y $\tilde{V}_y$ Usamos la regla de Einstein

$$\tilde{V}_x = \frac{V_x - V}{1 - \frac{V_x V}{c}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}c - \sqrt{\frac{2}{3}}c}{1 - 2/3} = 0 \quad \boxed{\tilde{V}_x = 0}$$

$$\tilde{V}_y = \frac{V_y}{\gamma'\left(1 - \frac{V_x V}{c}\right)}$$

γ': factor asociado al mov entre S y S'

$\gamma' = \sqrt{5/3}$

$$= \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{\sqrt{\frac{2}{5}}c}{1 - \frac{2}{3}} \Rightarrow \boxed{\tilde{V}_y = \frac{\sqrt{6}}{3}c}$$

- Para encontrar $\tilde{u}_x$ y $\tilde{u}_y$ usamos el hecho que la 4-vel transforma como tensor (como las posiciones), $u' = \Lambda u$

$$\Rightarrow \tilde{u}_x = \gamma'(u_x - \beta u^0) = \sqrt{5/3}\left(\sqrt{2}c - \frac{\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{5}}}\cdot\cancel{\sqrt{5}}c\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\tilde{u}_x = 0}$$

$$\tilde{u}_y = u_y \Rightarrow \boxed{\tilde{u}_y = \sqrt{2}c}$$

- Corroboramos usando la definición de velocidad propia en el sistema $\tilde{S}$

$$\tilde{u}^i = \frac{\tilde{v}^i}{\sqrt{1 - \frac{\tilde{v}^2}{c^2}}} \qquad \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\tilde{v}^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{6}{9}}} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tilde{u}^i = \sqrt{3}\,\tilde{v}^i$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{u}_x = \sqrt{3}\cdot 0 = 0}, \quad \boxed{\tilde{u}_y = \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}c = \sqrt{2}c}$$