MA1002-8: Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Alvaro Bustos
Auxiliares: Nicolas Toro

Auxiliar 1

P1. [Convergencia] Estudie la convergencia de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

b) $b_n = \left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right)^{3n^2}$

c) $c_n = \frac{2020^{2020n}}{(2020n)!}$

d) $d_n = n\ln(1 + \frac{1}{2n})$

P2. [Sucesiones] Veamos que el limite de $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ es un numero irracional. Para esto:

a) Pruebe que los intervalos $I_n = [S_n, b_n]$ son encajonados, con $b_n = S_n + \frac{1}{n \cdot n!}$

b) Considerar $L = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, por contradiccion decir que $L \in \mathbb{Q}$ y concluir.

P3. [B-W] Considere la siguiente sucesion $(x_n)_n$ definida por la recurrencia:

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}x_{n-1} \quad \forall n \geq 1 \quad \text{con } x_0 = 0, x_1 = 1$$

Pruebe que $(x_n)_n$ tiene una subsucesion convergente

P4. [B-W] Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funcion continua y $(a_n)_n$ una sucesion en $[a, b]$ (con $a < b$) no necesariamente convergente, tal que $\lim f(a_n) = L$

a) Mostrar que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = L$

b) Si ademas $f(x) \neq L \ \forall x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$, entonces $(a_n)_n$ converge a x_0

P5. [Continuidad] Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funcion tal que existe $L > 0$ que satisface:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Mostrar que f es continua.

P6. [Continuidad] Sean f y g funciones tales que:

- g es continua en 0
- $g(0) = 0$
- $|f(x)| \leq |g(x)| \ \forall x$

Mostrar que f es continua en 0

P7. [Propuesto] Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesion definida por:

$$a_{n+1} = \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k a_k \quad \text{con } a_1 = 1$$

Ver que es creciente y que converge.

Hint:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) < e^{2-\frac{1}{n}} \quad \forall n$$