MA1002-8: Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Alvaro Bustos
Auxiliares: Nicolas Toro

Guia C1 Soluciones

P1. [Continuidad] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ \ln(1-x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Muestre que $\forall x \in [1, \infty)$, se tiene $|f(x)| \leq \sqrt{|x|}$

b) Mostrar que $f(x)$ es continua en 0

a) Trivial, pues $|f(x)| = f(x)$ para $f(x) > 0$

b) Por un lado $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \ln(1-x) = 0$
Por otro lado, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt{x} = 0.$
Ademas $f(0) = 0$, por lo que se tiene que $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ y se concluye que f es continua en 0 ■

P2. [Continuidad&TVI] Considere la funcion:

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

a) Estudiar la continuidad en $\mathbb{R}$. Es uniforme continua?

b) Muestre que si $y \in (-1, 1)$, entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\tanh(x) = y$

c) Mostrar que la ecuacion $\tanh(x) = \cos(x)$ tiene infinitas soluciones en $\mathbb{R}$

P3. [TVI] Considere la funcion $f(x) = x^{13} + 7x^3 - 5$. Demuestre que f es continua y existe un unico $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$

Demostración. Claramente f es continua por algebra de continuas. Ademas $f(0) = -5$ y $f(1) = 3$, se sigue por TVI que $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$.
Notamos que $f'(x) = 13x^2 + 21x^2 > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, por lo que f es estrictamente creciente en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y por tanto inyectiva. De todos modos $f(0) = -5 \neq 0$ y se sigue que x_0 es unico. ■

P4. [Derivada] Mostrar que $\forall x \in \mathbb{R}$, la funcion $f(x) = |x|^3$ tiene primera y segunda derivada. Pero f''' no existe en $x = 0$

P5. [Funcion] Estudiar completamente la funcion $y = f(x)$ tal que:

$$x^3 + y^3 = 3x^2$$

Demostración. Notamos que la funcion queda representada por: $y = \sqrt[3]{x^2(3-x)}$
$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\text{Rec}(f) = \mathbb{R}$, $\text{Zeros}(f) = \{0, 3\}$, Interseccion con eje y $= (0, 0)$.
Asintotas de la forma $y = mx + n$:

- $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2(3-x)}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{3-x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1} = -1$

- $n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^2(3-x)} + x = \lim\limits_{x\to\infty} x\left[\sqrt[3]{\frac{3-x}{x}} + 1\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{\frac{3-x}{x}}+1}{\frac{1}{x}}$
$\overset{\text{L'Hop}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{x}-1\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{3}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\left(\frac{3}{x}-1\right)^{\frac{2}{3}}} = 1$

Se concluye que tiene una asintota oblicua en $y = -x + 1$. Si $x \to -\infty$, se tiene la misma asintota.
Veamos el crecimiento analizando $f'(x)$:
$f'(x) = \dfrac{2-x}{x^{\frac{1}{3}}(3-x)^{\frac{2}{3}}}$, con puntos criticos $\{0, 2, 3\}$. Luego tenemos la siguiente tabla:

$x \in$	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo de $f'(x)$	< 0	> 0	< 0	< 0
Crecimiento	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

Veamos la concavidad, calculemos $f''(x)$:

$$f'(x) = \frac{2-x}{x^{\frac{1}{3}}(3-x)^{\frac{2}{3}}} \; / \ln(\cdot) \Longrightarrow \ln f'(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{3}\ln(x) - \frac{2}{3}\ln(3-x)$$

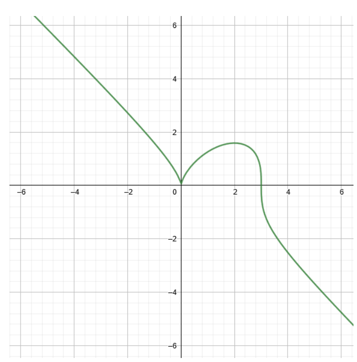
Aplicando la derivada a $\ln f'(x)$, queda:

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = -\frac{1}{2-x} - \frac{1}{3x} + \frac{2}{3(3-x)}$$

Luego $f''(x) = -\dfrac{2}{x^{\frac{4}{3}}(3-x)^{\frac{5}{3}}}$, con puntos criticos $\{0, 3\}$ y podemos formar la tabla:

$x \in$	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
Signo de $f''(x)$	< 0	< 0	> 0
Concavidad	$\cap$	$\cap$	$\cup$

Luego, la funcion se ve como:



Donde se puede apreciar que:

- En $(-\infty, 0)$ decrece concava
- En $(0, 2)$ crece concava
- En $(2, 3)$ decrece concava
- En $(3, \infty)$ decrece convexa

$\blacksquare$

P6. [Modelamiento] Entre 0^oC y 30^oC el volumen V de 1kg de agua a una temperatura T, esta dado aproximadamente por la formula:

$$V(T) = 1000{,}2 - \frac{T}{10} + \frac{T^2}{80}$$

Encuentre la temperatura a la cual el agua tiene densidad maxima.

Demostración. Notamos que la densidad ρ esta dada por $\rho = \dfrac{\text{masa}}{V}$, por lo que debemos minimizar el volumen. Notamos que $V'(T) = -\dfrac{1}{10} + \dfrac{T}{40}$ e igualando a 0, queda el punto critico $T^* = 4$. Por ultimo, notamos que $V''(T) = \dfrac{1}{40} > 0\ \forall T$, por lo que T^* es un minimo y se concluye que la densidad maxima se obtiene en $T = T^*$ $\blacksquare$

P7. [Taylor] Calcule el polinomio de orden 2 de $f(x) = e^{x\cos(x)}$ en torno a $x = 0$

Demostración. Calculemos las derivadas:
$f'(x) = e^{x\cos(x)}[\cos(x) - x\sin(x)]$
$f''(x) = e^{x\cos(x)}\left[-2\sin(x) - x\cos(x) + \big(\cos(x) - x\sin(x)\big)^2\right]$
Recordar que el Taylor de orden 2 en torno a x_0 de una funcion f esta dado por:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!}$$

En particular para este f, queda:

$$f_{\text{Taylor}} = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$\blacksquare$

P8. [TVI&Bolzano] Considere la familia de funciones (f_n) definida por $f_n = \cos^n(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

a) Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n tiene al menos un punto fijo, es decir, $f_n(\bar{x}) = \bar{x}$ para algun $\bar{x} \in \mathbb{R}$

b) Sea (x_n) una sucesion tal que x_n es un punto fijo de f_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Muestre que (x_n) tiene al menos una subsucesion convergente

a) Consideremos la funcion $\phi_n(x) = \cos^n(x) - x$. Notamos que $\phi_n(0) = 1 > 0$ y $\phi_n(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} < 0$. Como ϕ_n es continua por algebra de continuas, se tiene por TVI que existe un $c \in \big(0, \frac{\pi}{2}\big)$ tal que $\phi_n(c) = 0 \Rightarrow \cos^n(c) = c$ y se tiene que c es punto fijo de f_n

b) Notamos que $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que $x_n = \cos^n(x_n)$, y se sigue que $|x_n| \leq 1$. Luego, por teorema de Bolzano, se tiene que (x_n) tiene al menos una subsucesion convergente $\blacksquare$

P9. [TVM] Sea $f\colon [a.b] \to [a.b]$ continua y diferenciable en (a, b), tal que:

$$\exists k \in (0, 1),\ \forall x, y \in [a, b],\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

a) Muestre que $f'(x) < 1,\ \forall x \in (a, b)$

b) Concluya que f tiene un unico punto fijo

a) Sea $x \in (a,b)$, notamos que dado cualquier $x_0 \in (a,b) \setminus \{x\}$, se tiene que $\exists k \in (0,1)$ para el cual:

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq k$$

En particular, para $x_0 \to x$, se mantiene la desigualdad y por tanto:

$$\lim_{x_0 \to x} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = \left| \lim_{x_0 \to x} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = |f'(x)| \leq k < 1$$

b) Consideremos $\varphi(x) = f(x) - x$ y notamos que:

- $\varphi(a) = f(a) - a \geq 0$, pues $a \leq f(a) \leq b$
- $\varphi(b) = f(b) - b \leq 0$, pues $a \leq f(b) \leq b$

Claramente φ es continua por algebra de continuas y por TVI, existe $\xi_1 \in (a,b)$ tal que $\varphi(\xi_1) = 0$, es decir, $f(\xi_1) = \xi_1$. Supongamos ξ_2 tambien es punto fijo, es decir, $f(\xi_2) = \xi_2$ y como f es derivable, se sigue por TVM que existe ξ entre ξ_1 y ξ_2 (en particular, $\xi \in (a,b)$) para el cual:

$$\frac{f(\xi_1) - f(\xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} = f'(\xi) \overset{f(\xi_i) = \xi_i}{=} 1$$

Lo cual contradice (a), por lo que se concluye que f tiene un unico punto fijo. ■

P10. [Continuidad uniforme] Sean f, g, h funciones definidas como:

$$f(x) = x - [x], \qquad g(x) = \sin(\pi f(x)), \qquad h(x) = \cos(\pi f(x))$$

con $[x]$ la parte entera de x.

a) Estudie la continuidad y continuidad uniforme de $g(x)$ y $h(x)$ en $\mathbb{R}$

b) Estudie la continuidad y continuidad uniforme de $g(x)$ y $h(x)$ en $[0,1)$

a) Notamos que f es periodica de periodo 1, y para los $x \in [k-1, k)$, con $k \in \mathbb{Z}$, se tiene que $f(x) \in [0,1)$ y en consecuencia $\pi f(x) \in [0, \pi)$. Luego, en cada $[k-1, k)$, $g(x)$ y $h(x)$ son continuas.
Por un lado, tenemos que $\lim_{x \to k^-} g(x) = \lim_{x \to k^-} \sin((x - [x])\pi) = \sin(1\pi) = 0$
Por otro, $\lim_{x \to k^+} g(x) = \lim_{x \to k^+} \sin((x - [x])\pi) = \sin(0\pi) = 0$.
Ademas $g(p) = 0$, luego g es continua en $[k-1, k]$ (cerrado y acotado), entonces g cont uniforme
Como g es periodica de periodo π, g es uniforme continua en $\mathbb{R}$

De forma analoga, $\lim_{x \to k^-} h(x) = \lim_{x \to k^-} \cos((x - [x])\pi) = \cos(1\pi) = -1$
Y por ultimo, $\lim_{x \to k^+} h(x) = \lim_{x \to k^+} \cos((x - [x])\pi) = \cos(0\pi) = 1$.
Se concluye que h no es cont en $[k-1, k]$ y por tanto, no es continua en $\mathbb{R}$

b) En $[0,1)$, $f(x) = x - [x] = x$ y se tiene que $g(x) = \sin(x\pi)$, $h(x) = \cos(x\pi)$. Notamos que en $[0,1]$, $\sin(x\pi)$ y $\cos(x\pi)$ son uniforme continuas, por lo que tambien lo son en $[0,1)$ y finalmente g y h son uniforme continuas en $[0,1)$ ■

P11. [Derivada] Sea $c > 0$, probar que $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en 0 ssi el limite $L = \lim_{x \to 0} \dfrac{f(cx) - f(x)}{x}$ existe.

P12. [TVM] Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables en $a \in \mathbb{R}$ con $f(a) = g(a)$ y $f'(a) = g'(a)$.
Probar que toda funcion $h(\cdot)$ tal que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ es derivable en a con $h'(a) = f'(a) = g'(a)$

P13. [TVM] Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, el cual cumple que:

- $f(x_0) \geq g(x_0)$
- $f'(x) \geq g'(x)\ \forall x \geq x_0$

Mostrar que $f(x) \geq g(x)\ \forall x \geq x_0$

P14. [TVM] Sea $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable. con derivada continua tal que $h'(0) = -1$.
Mostrar que existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$, se tiene que $[h(x) - h(0)]x < 0$

Demostración. Como h' es continua en 0, se tiene que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, tal que si $|x| < \delta$, entonces $|h'(x) - h'(0)| < \epsilon$. Es decir, $-\epsilon - 1 < h'(x) < \epsilon - 1$. Tomando $\epsilon = 1$, podemos encontrar δ que garantiza que la derivada sera negativa.
Consideremos $x > 0$ el cual cumpla que $0 < x < \delta$ y se tendra que $[0, x] \subset [-\delta, \delta]$. Por TVM existe $c \in (0, x)$ tal que $h'(c) = \dfrac{h(x) - h(0)}{x - 0}$, y como $c \in (0, x)$, se tiene que $\dfrac{h(x) - h(0)}{x} < 0$, por lo que $[h(x) - h(0)]x < 0$. Para $x < 0$ es analogo, tomando el intervalo $[x, 0]$ ■

P15. [TVI] Suponga que f es continua en $[0, 1]$ y $f(0) = f(1)$. Sea $n \in \mathbb{N}$, mostrar que existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right)$$

Demostración. Definamos $g(x) = f(x) - f(x - 1/n)$ y consideremos $S = \{f(0), f(1/n), \cdots, f(1)\}$. Elijamos k de forma que $f(k/n)$ es el mas grande dentro de S. Supongamos $k \neq 0$ y $k \neq n$, luego:
$g(k/n) = f(k/n) - f([k+1]/n) \geq 0$, y tambien
$g([k-1]/n) = f([k-1]/n) - f(k/n) \leq 0$
Por TVI, existe $x_0 \in [(k-1)/n; k/n]$ para el cual $g(x_0) = 0$, es decir $f(x_0) = f(x_0 + \frac{1}{n})$.
Si el mayor numero en S es $f(0) = f(1)$, entonces tomamos k de forma que $f(k/n)$ sea el minimo valor en S y repetimos el argumento
Por ultimo si $f(0) = f(1)$ es el mayor y menor valor en S, entonces todos son iguales y $f(0) = f(1/n)$ ■

P16. [TVM] Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Mostrar que la ecuacion:

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$$

siempre tiene una raiz entre 0 y 1.

Demostración. Sea $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$, notamos que $f(0) = 0$ y $f(1) = a + b + c$. Por TVM, existe un $x_0 \in (0, 1)$ tal que $f'(x_0) = a + b + c$, es decir $4ax_0 + 3bx_0^2 + 2cx_0 = a + b + c$ ■

P17. [Rolle] Mostrar que $\forall c \in \mathbb{R}$, $x^3 - 3x + c$ tiene a lo mas un raiz en $[0, 1]$

Demostración. Sea $f(x) = x^3 - 3x + c$. Consideremos a, b raices de f en $[0, 1]$, entonces por el teorema de Rolle, hay un $x_0 \in (a, b)$ para el cual $f'(x_0) = 0$.
Pero notamos que $f'(x) = 3x^2 - 3$ es nunca zero en $(0, 1)$ $\longrightarrow\!\longleftarrow$. Se concluye que tiene a lo mas una raiz en $[0, 1]$ ■

P18. [TVI&TVM] Sea f diferenciable en $[0,1]$, con $f(0)=0$ y $f(1)=1$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, mostrar que existen puntos distintos $x_1,x_2,\cdots,x_n$ en $[0,1]$ para los cuales:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f'(x_i)}=n$$

Demostración. Consideremos $\{0,1/n,2/n,\cdots,(n-1)/n,1\}$. Por TVI, para cada k/n con $k\neq 0$ y $k\neq n$, existe un x_k que hace que $f(x_k)=k/n$, tomando $x_0=0$ y $x_n=1$ por hipotesis del enunciado.
Por TVM, existe $y_k\in(x_k,x_{k-1})$ tal que $f'(y_k)=\dfrac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}=\dfrac{k/n-(k-1)/n}{x_k-x_{k-1}}=\dfrac{1}{n(x_k-x_{k-1})}$
Claramente los y_k's son todos distintos, pues perteneces a intervalos diferentes y se tiene que:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f'(y_k)}=n\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})=n(x_n-x_0)=n$$

■

P19. [TVI&TVM] Sea $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ continua y diferenciable en $(0,1)$, tal que $f(0)=1$ y $f(1)=0$. Mostrar que existe $x_0\in(0,1)$ que satisface:

$$|f'(x_0)|\geq 2020f(x_0)^{2020}$$

Hint: Considerar $g(x)=\dfrac{1}{f(x)^{2019}}$

Demostración. Notamos que si existe $x_0\in(0,1)$ tal que $f(x_0)=0$, la demostracion estaria lista.
Supongamos que no hay $x_0\in(0,1)$ tal que $f(x_0)=0$, por TVI se sigue que $f(x)>0$ $\forall x\in[0,1)$. Consideremos $g\colon[0,1)\to\mathbb{R}$ definida como $g(x)=\dfrac{1}{f(x)^{2019}}$. Como f es continua en 1, se tiene que $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=\infty$ y por TVI existe $x_1\in(0,1)$ para el cual $g(x_1)=2019\cdot 2020+1$, notando que $g(0)=1$. Finalmente, por TVM existe $x_0\in(0,x_1)$ para el cual:

$$g'(x_0)=\frac{g(x_1)-g(0)}{x_1-0}$$

Notamos que $g'(x_0)=\dfrac{-2019f'(x_0)}{f(x_0)^{2020}}$. Ademas $\dfrac{g(x_1)-g(0)}{x_1-0}>2019\cdot 2020$
Se concluye que $|f'(x_0)|\geq -f'(x_0)>2020f(x_0)^{2020}$ ■

P20. [Rolle] Sean $f,g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ continuas, diferenciables en (a,b), con $g(x)\neq 0$ $\forall x\in[a,b]$, tal que $\dfrac{f(a)}{g(a)}=\dfrac{f(b)}{g(b)}$
Mostrar que existe un $c\in(a,b)$ para el cual $\dfrac{f(c)}{g(c)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Demostración. Consideremos $h\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, continua por algebra de continuas y bien definida pues $g\neq 0$. Notamos que $h(a)=h(b)$ y por Rolle existe $c\in(a,b)$ para el cual $h'(c)=0$. Ademas $h'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ y se tendra que $f'(c)g(c)=f(c)g'(c)$, con lo que se concluye. ■

P21. [TVM] Sea $f\colon \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to [-1,1]$ continua y diferenciable en $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$. Mostrar que existe $x_0 \in \left(\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ que satisface:

$$|f'(x_0)| \leq 1 + f(x_0)^2$$

Hint: Considerar $g(x) = \arctan(f(x))$

Demostración. Consideremos $g(x) = \arctan(f(x))$, luego $g\colon \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Notamos que es continua por composicion de continuas y diferenciable en $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ por composicion de diferenciables.
Por TVM:

$$\frac{g\left(\frac{\pi}{4}\right) - g\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{2}} = g'(x_0) \quad \text{para algun } x_0 \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

Luego se tendra que:

$$\frac{\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{2}} \geq \frac{g\left(\frac{\pi}{4}\right) - g\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{2}} = [\arctan(f(x_0))]' = \frac{f'(x_0)}{1 + f(x_0)^2}$$

y se sigue que:

$$1 + f(x_0)^2 \geq f'(x_0)$$

Analogamente:

$$\frac{-\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{2}} \leq \frac{g\left(\frac{\pi}{4}\right) - g\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{2}} = [\arctan(f(x_0))]' = \frac{f'(x_0)}{1 + f(x_0)^2}$$

y se tiene que:

$$-\left(1 + f(x_0)^2\right) \leq f'(x_0) \Longrightarrow 1 + f(x_0)^2 \geq -f'(x_0)$$

Con lo que se concluye que $|f'(x_0)| \leq 1 + f(x_0)^2$ para algun $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ ■

P22. [Fermat] Sean $b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}_+$. Demuestre que si $b_1^x + ... + b_n^x \geq n \ \forall x \in \mathbb{R}$, entonces $b_1 \cdots b_n = 1$

Demostración. Consideremos $f(x) = b_1^x + ... + b_n^x$ y notemos que $f(0) = n$, por lo que $x = 0$ es un minimo local de f y por Fermat, $f'(0) = 0$. Por otro lado $f'(x) = b_1^x \ln b_1 + ... + b_n^x \ln b_n$, por lo que $\ln b_1 + ... + \ln b_n = 0$ y se concluye que $b_1 \cdots b_n = 1$ ■