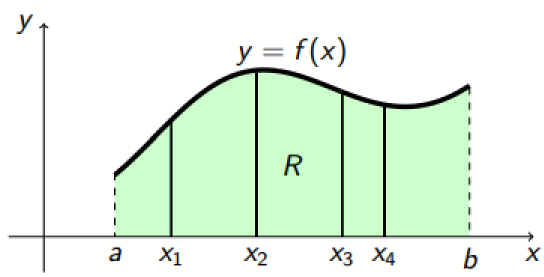
**MA1002-8:** Cálculo Diferencial e Integral
**Profesor:** Alvaro Bustos
**Auxiliares:** Nicolas Toro

# Resumen sumas de Riemann

Consideremos el intervalo $[a, b]$ particionado por $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ como se ve en la figura:




Pero esta vez, de forma **equiespaciada**, es decir, $\Delta x_i = (x_i - x_{i-1}) = \dfrac{b-a}{n} \quad \forall i = 1, ..., n$.
Con esto, se tiene que:

$$\begin{aligned}
x_0 &= a \\
x_1 &= a + \frac{b-a}{n} \\
x_2 &= a + 2\frac{b-a}{n} \\
&\vdots \\
x_i &= a + i\frac{b-a}{n}
\end{aligned}$$

Notamos que el area bajo $f(x)$ esta dado por $\int_a^b f(x)dx$, que por la **Observacion 16** tiene asociadas una suma inferior $s(f, P)$ y una superior $S(f, P)$, Ademas, sabemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)\Delta x_i = s(f, P) \leq \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(x_i - x_{i-1}) \leq S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)\Delta x_i$$

con $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ cualquiera.
Como para funciones integrables se tiene que $\lim_{n\to\infty} s(f, P) = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S(f, P)$, se tiene que:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(a + i\frac{(b-a)}{n}) \underbrace{\Delta x_i}_{=\frac{(b-a)}{n}}$$

**Ejemplos:**

i) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{i^2+n^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{i}{n}}{\frac{i^2}{n^2}+\frac{n^2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{i}{n}}{\left(\frac{i}{n}\right)^2+1} \cdot \frac{1}{n}$

Identificando terminos, tenemos que:

- $f(x_i) = \frac{\frac{i}{n}}{\left(\frac{i}{n}\right)^2+1}$
- $\Delta x_i = \frac{(b-a)}{n} = \frac{1}{n}$

De esta manera, $(b-a)=1$, $x_i = a + i\frac{(b-a)}{n} = \frac{i}{n}$ y $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ y se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{i^2+n^2} = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$$

ii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n}\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{n}\cos^2\left(\frac{k\frac{\pi}{2}}{n}\right)$

Identificando terminos, tenemos que:

- $f(x_k) = \cos^2\left(\frac{k\frac{\pi}{2}}{n}\right)$
- $\Delta x_k = \frac{(b-a)}{n} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)}{n}$

De esta manera, $(b-a) = \frac{\pi}{2}$, $x_k = a + k\frac{(b-a)}{n} = \frac{k\frac{\pi}{2}}{n}$ y $f(x) = \cos^2(x)$ y se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n}\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx$$