MA1002-8: Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Alvaro Bustos
Auxiliares: Nicolas Toro

Auxiliar 8

P1. [Suma de Riemann] Sea $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0,1) \\ 3, & \text{si } x = 1 \\ 2, & \text{si } x \in (1,2] \end{cases}$$

a) Para la particion $P = \{0, \frac{7}{8}, 1, \frac{9}{8}, 2\}$ calcule la suma inferior $s(f,P)$ y superior $S(f,P)$

b) Encuentre una particion $P_\epsilon \in \mathcal{P}_{[0,2]}$ tal que $\forall \epsilon, 0 < \epsilon < 1$, se cumple que $S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$

P2. [P2 2016] Considere la funcion $f\colon [0,3] \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1) \\ g(x) & \text{si } x \in [1,3] \end{cases}$$

Con $g(x)$ una funcion decreciente en $[1,3]$ que cumple $g(1) = 2$ y $g(3) = 0$. Dado $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, se pide:

a) Para la particion $P = \{0, 1-h, x_0, x_1, ..., x_n\}$, donde $x_i = 1 + ih$, para $i = 0, ..., n$ y $h = \frac{2}{n}$
Calcule la suma inferior $s(f,P)$ y superior $S(f,P)$

b) Demuestre que:

$$S(f,P) - s(f,P) = h + \sum_{i=1}^{n} \left(g(x_{i-1}) - g(x_i)\right) h$$

Calcule la sumatoria y deduzca que f cumple la condicion de Riemann indicando para que valores de h se cumple

c) En el caso particular de $g(x) = 3 - x$, calcule explicitamente $s(f,P)$ en terminos de n y pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} s(f,P) = 3$

P3. [Suma de Riemann] Considere la funcion definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in (1,2] \end{cases}$$

a) Para la particion de $[0,2]$ dada por $P = \{0,1,2\}$, demuestre que la suma inferior $s(f,P) = 1$ y la superior $S(f,P) = 4$

b) Para $n \in \mathbb{N}$ y $\delta \in (0,1)$ considere la particion dada por:

$$P = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n}{n}, 1+\delta, 2\}$$

Calcule $s(f,P)$ y $S(f,P)$ y muestre que $S(f,P) - s(f,P) = \frac{2}{n} + \delta$

c) Concluya que f es Riemann integrable en $[0,2]$