MA1002-8: Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Alvaro Bustos
Auxiliares: Nicolas Toro

Auxiliar 13

P1. [Series de potencia] Encuentre el radio e intervalo de convergencia de las siguientes series de potencia

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x^n$

b) $\sum_{n\geq 0} n! x^n$

c) $\sum_{n\geq 1} \frac{(2x)^n}{n^2}$

d) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^{2n+1}}{2^{n^2+1}} x^n$

e) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^3}{4^n} x^n$

f) $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n!} x^n$

g) $\sum_{n\geq 1} \frac{5^n}{n^{3/2}} x^n$

h) $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right) x^n$, con $0 < a < b$

i) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(3+(-1)^n)}^n$

P2. [Fibonacci] Considere la sucesion de Fibonacci $(F_n)_n$ definida como:

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \; n \geq 1$$

a) Muestre que $\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{1}{1-x-x^2}$

b) Considere $\varphi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\varphi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Note que $F_n = \frac{\varphi_1^{n+1} - \varphi_2^{n+1}}{\sqrt{5}}$.

Use lo anterior para encontrar el radio e intervalo de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$

P3. [Integracion de series] Integrando la serie de potencias $\sum x^n$, calcule el valor de la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(1-\frac{1}{e})^n}{n}$$

P4. [Propiedad] Mostrar que si $a_n \geq 0 \; \forall n$ y $\sum a_n$ converge, entonces la serie:

$$\sum_n \frac{\sqrt{a_n}}{n}$$

tambien converge.