MA3001 Elementos de Álgebra.
Profesor: Angel Pardo.
Auxiliares: Felipe Flores, Pablo Paredes, Benjamín Jauregui.
Fecha: 25 de septiembre de 2020.

Auxiliar 8: Repaso C2

Definición 1. Dado un anillo $A(,+,\cdot)$ definimos

$$A^* = A\backslash\{0\}$$
$$A^\times = \{z \in A\colon \text{ z es invertible}\}$$

Definición 2. Un **dominio** es un anillo no trivial sin divisores del 0. Un **dominio integral** es un dominio que además es conmutativo.

Definición 3. Un ideal I es un subgrupo del grupo aditivo $(A,+)$ tal que $AI = IA = I$.

Definición 4. Decimos que un ideal $I \subset A$ es **primo** si $I \neq A$ y para todo $a, b \in A$ tal que $ab \in A$, entonces $a \in A$ o $b \in A$.

Definición 5. Decimos que un ideal $I \subset A$ es maximal si todo otro ideal $J \subseteq A$ cumple que $I \subset J$, entonces $I = J$ o $I = A$.

Definición 6. Un ideal I es maximal ssi $A\backslash I$ es un cuerpo.

Definición 7. Un anillo A es un **DIP** si es un dominio integral donde todo ideal es principal.

Definición 8. Un **DFU** es un dominio integral donde para todo $a \in A^*\backslash A^\times$ existe una única factorización (salvo reordenamiento de los elementos). Es decir, existe un único $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n, \quad p_i \in A \forall i \in [n]$$

P1.- Sea $(A,+,\cdot)$ un anillo conmutativo.

a) **(Propuesto)** Demuestre que $(A^\times,\cdot)$ es grupo.

b) Muestre que si $(S,+,\cdot)$ es otro anillo conmutativo, $(R\times S)^\times = R^\times \times S^\times$.

c) La función de euler se define por $\varphi(1) = 1$ y $\varphi(n) = |Z_n^\times|$ para $n > 1$. Muestre que

$$mcd(m,n) = 1 \implies \varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$$

d) Dado p primo, calcule $\varphi(p^k)$ con $k \in \mathbb{N}$.

e) **(Propuesto)** Usando lo anterior demuestre que

$$\varphi(n) = n \prod_{p \text{ primo}, p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

P2.-

Definición 9. Un dominio A se dice dominio euclidiano con norma N, donde $N\colon A \to \mathbb{N}_0$ (con $N(0) = 0$) si

$$\forall a, b \in R, \exists q, s \in A, N(r) < N(b), \text{ tal que } a = qb + s$$

Demuestre que si A es un dominio euclidiano, entonces es un DIP.

P3.- Sea A un anillo conmutativo y sea $A[[X]]$ el anillo de las series formales de potencias.

a) Demuestre que $A[[X]]$ es dominio integral ssi A es dominio integral.

b) Pruebe que si A es dominio, $((X))$ es primo.

c) Pruebe que $((X))$ es maximal ssi A es cuerpo.

P4.- **(Propuesto)** Demuestre que un anillo A cumple que

$$A \text{ es DIP} \iff A \text{ es DFU} \wedge \text{ todo ideal primo no nulo es maximal}$$