MA3101-1 Elementos de Álgebra 2020
Profesor: Ángel Pardo.
Auxiliares: Felipe Flores Ll., Pablo Paredes, Benjamín Jauregui.
Fecha: 20 de Noviembre del 2020

Auxiliar 9

P1. Sea R un dominio integral con unidad.

a) Muestre que $R[X]^\times = R^\times$.

b) Sean $a \in R^*$, $p \in R[X]$ tales que $\{a, X\} \subset (f)$. Pruebe que $f \in R[X]^\times$

c) Demuestre que si $(a, X) = R[X]$, $a \in R^\times$.

d) Concluya que si $R[X]$ es un DIP, R es un cuerpo.

P2. Sea $\mathbb{F}_p$ el cuerpo de p elementos (es decir $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$).

a) Sea $f \in \mathbb{F}_p[X]^i$ de grado n. Muestre que $\mathbb{F}_p[X]/(f)$ es un cuerpo de p^n elementos.

b) Encuentre todos los $c \in \mathbb{F}_3$ tales que $\mathbb{F}_3[X]/(X^3 + cX^2 + 1)$ es un cuerpo.

P3. Dado un anillo conmutativo R con unidad, definimos el anillo de las series formales por

$$R[[X]] = \{\sum_{n\in\mathbb{N}} r_i X^i \mid r_i \in R\}$$

Con las operaciones obvias.

a) Muestre que la serie $1 - X \in R[[X]]$ es invertible.

b) Pruebe que
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} r_i X^i \in R[[X]]^\times \Leftrightarrow r_0 \in R^\times$$

c) Asuma que R no tiene divisores de cero y muestre que el cuerpo de fracciones de $R[[X]]$ está naturalmente incluido en el cuerpo de series de Laurent $F((X))$, con F el cuerpo de fracciones de R. Concluya que si $R = F$ (es decir, si R es un cuerpo), ambos coinciden.