P1) Si G es abeliano y finito, $G = \prod_{i=1}^{m} \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$

y $|G| = \prod_{i=1}^{m} p_i$

Si $|G| = 49 = 7^2$, entonces $G \in \{(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2, (\mathbb{Z}/49\mathbb{Z})\}$

Si $|G| = 111 = 3 \cdot 37$, entonces $G \in \{\mathbb{Z}/111\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/37\mathbb{Z}\}$

P2) a) Tomamos $m \in M$, $\phi = id_M$

$(\phi^n + a_1 \phi^{n-1} + \dots + a_n id_M)(m) = 0$

$\Rightarrow 0 = \underbrace{(1 + a_1 + \dots + a_n)}_{x} m$

Como $x - 1 = a_1 + \dots + a_m \in I$. $\square$

b) Por lo anterior, $x - 1 \in I$ y $xM = 0$. Veamos que $x \in R^{\times}$:

Sea J el ideal generado por x. J puede ser extendido a un ideal maximal $\tilde{J} \supset J$. $\ni x-1$. Así,

$(x-1) - x = -1 \in \tilde{J}$. Por ende $J = xR = R$. $\Rightarrow \exists y \in R$ tal que $xy = 1 \Rightarrow x \in R^{\times}$.

$\Rightarrow M = (yx)M = y(xM) = 0$. $\square$

Escaneado con CamScanner

c) Consideramos $M/N = IM/N \underset{\uparrow}{=} I(M/N)$

pues $im+N = i(m+N)$.

Aplicando la parte anterior a M/N, concluimos que $M/N = 0 \Rightarrow M = N$.

P3)

a) Por contradicción, suponga que $\exists x \in K$ tal que $P(x)=0$. Tomamos $F \leq F(x) \leq K$.

Entonces $\underbrace{[K:F(x)][F(x):F]}_{} = [K:F]$

$\Rightarrow$ $gr(p)\,[K:F(x)]$.

Como $gr(p) \geq 2$, $[K:F(x)] \neq [K:F]$ pero $[K:F(x)] = \dfrac{[K:F]}{gr(p)} \in \mathbb{N}$.

P4)

a) Si $K = \{x_i\}_{i=1}^{n}$, Tomamos $p(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$.

b) Tomamos $\tilde{p}(X) = p(X) + 1$

i) Considere

$$\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} f^2 \subseteq \dots \subseteq \operatorname{Ker} f^k \subseteq \dots$$

Como M es noetheriano, existe $k \in \mathbb{N}$ tal $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^n \ \forall n \geq k$.

Veamos que $\operatorname{Ker} f^k \cap \operatorname{Im} f^k = \{0\}$: Sea $m \in \operatorname{Ker} f^k \cap \operatorname{Im} f^k$.

Como $m \in \operatorname{Im} f^k$, existe $m' \in M$ tal que $m = f^k(m')$. Pero como $m \in \operatorname{Ker} f^k$, $f^k(m) = 0 = f^k(f^k(m')) = f^{2k}(m'). \Rightarrow m' \in \operatorname{Ker} f^{2k}$.

Pero $\operatorname{Ker} f^{2k} = \operatorname{Ker} f^k \Rightarrow 0 = f^k(m') = m$.

$\therefore \operatorname{Ker} f^k \cap \operatorname{Im} f^k = \{0\}$.