Clase 02 MA3705. 04 de septiembre 2020.

Tabla

- Subgrafos, conectividad y componentes conexas.
- Árboles y cortes
- Problemas de conectividad. Generación por aristas.
- Algoritmos de búsqueda

Subgrafos, conectividad y componentes conexas.

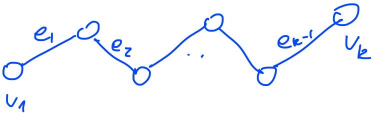
Convenciones de notación.

Cada vez que digamos G grafo, queremos decir G es grafo simple.

Notación útil

- Si A es conjunto y $v \notin A$. $A + v := A \cup \{v\}$. $\cancel{A+B}$
- Si A es conjunto y $v \in A$. $A - v := A \setminus \{v\}$.
- Si A es conjunto, $\binom{A}{k}$ es la colección de conjuntos de tamaño k en A.
- Si G es grafo, entonces $\underline{E(G)} \subseteq \binom{V}{2}$.
- $\underline{[n]} = \{1, 2, \ldots, n\} = [1, n] \cap \mathbb{Z}$. $[0] = \emptyset$

Más ejemplos de grafos



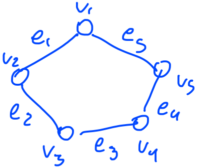
Camino de largo $k-1$

P_{k-1}

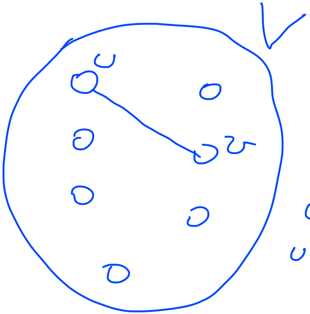
Red de comunicaciones.

V = computadores

E = links entre pares de computadores.



C_5 $\quad$ C_k



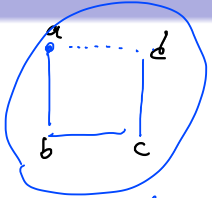
<u>Grafo:</u> R relación simétrica sobre V

$uv \in E$

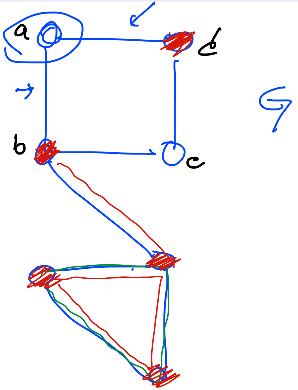
uRv.

Subgrafos

$H = (V', E')$ es subgrafo de $G = (V, E)$ si (1) H es grafo, (2) $V' \subseteq V$, (3) $E' \subseteq E$.



es subgrafo de G



1. Un subgrafo H de G es *cobertor* si $V(H) = V(G)$.
2. El grafo $\boxed{\text{inducido por } W \subseteq V}$ es $G[W] = (W, E[W])$.
3. Grafo obtenido al borrar una arista. $G - e = (V, E - e)$
   $G = (V, E)$
4. Grafo obtenido al borrar un vértice. $G - v = G[V - v]$

$H = (V, \emptyset)$

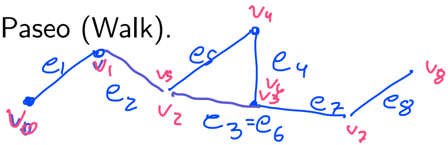
Conceptos básicos de conectividad en grafos

largo = # aristas.

v

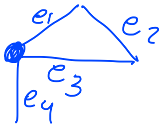
Sea $G = (V, E)$ un grafo. Se definen:

1. Paseo (Walk).



2. Sendero (Trail).

Paseo que no repite aristas



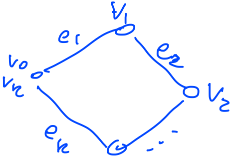
3. Camino (Path).

Paseo que no repite aristas ni vértices.

4. Paseo abierto/cerrado.

Si el paseo termina en el mismo vértice que parte es un paseo cerrado

5. Ciclo.



Paseo cerrado que no repite aristas ni vertice excepto que $V_0 = V_k$

Lemas de conectividad para un grafo G

Lema

Si existe paseo de u a v entonces existe camino de u a v. ✓

Se define la relación *ser alcanzable en* G como:

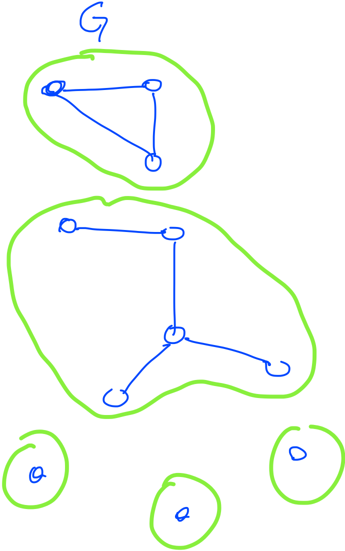
$u \sim_G v$: (v es alcanzable desde u) si

$\exists$ u-v camino en el grafo.

Lema

$\sim_G$ es una relación de equivalencia en $V(G)$

Sus clases de equivalencia $=$ componentes conexas de G.
Si G tiene una sola componente conexa: G es conexo.



Componentes conexas de un grafo

Llamemos $cc(G)$ al número de componentes conexas de $G=(V,E)$.

Lema

Si G es acíclico entonces $cc(G)=|V|-|E|$

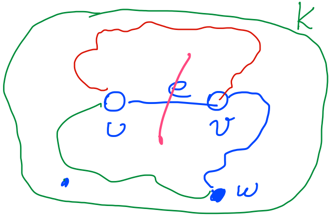
Conclusión $cc(G-e)=cc(G)+1$

$\Rightarrow cc(G) = cc(G-e)-1$
$= |V|-|E-e|-1$
$= |V|-|E|+1-1$.

Dem: Inducción en $|E|$.

① $|E|=0$. $cc(G)=|V|$ ✓

② $|E|\geq 1$. Sea $e\in E$ $e=uv$. Sea K la comp. conexa que contiene a u, v.



En $G-e$, todas las comp. excepto K se mantienen

Pero K se divide en 2 $K=\underline{K_u}\cup\underline{K_v}$

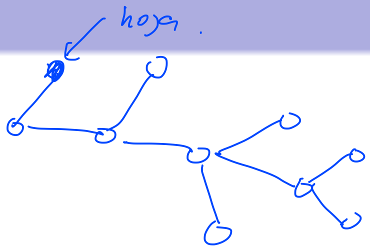
$u\in K_u$ ← comp en $G-e$
K_v ← comp en $G-e$

$\Rightarrow \forall w\in K$ $\boxed{w\sim_{G-e} u}$ ó $\boxed{w\sim_{G-e} v}$

De hecho $u\not\sim_{G-e} v$. Si $u\sim_{G-e} v$ $\exists Q$ camino en $G-e$. $Q+e$ sería ciclo en G.

Árboles y cortes

Árboles, Bosques, Hojas



Un árbol es ... grafo conexo y acíclico

$cc(G) = 1$

Un bosque es ... grafo acíclico. → Cada comp conexa es un árbol

Una hoja es ... Un vértice de grado 1.

Idea: Si G tiene ciclo conexo

$e \in C$ $G-e$ sigue siendo conexo.

Algunas propiedades:

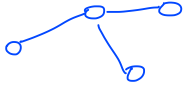
- Todo grafo conexo contiene ... un árbol. cobertor
- Todo grafo contiene ... Un bosque. cobertor
- Todo bosque con al menos una arista ... tiene 2 hojas

Otras propiedades de árboles:

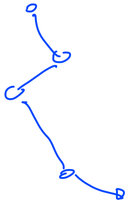
G acíclico $\Rightarrow cc(G) = |V| - |E|$

conexo $\to 1$

Un grafo G es árbol si y solo si



1. G es conexo y acíclico ✓
2. Para todo u, v existe exactamente un camino de u a v en G.
3. G es conexo y tiene a lo más $|V| - 1$ aristas.
4. G es conexo y para todo $e \in E(G)$, $G - e$ ... no es conexo
5. G es acíclico y tiene al menos $|V| - 1$ aristas.
6. G es acíclico y para todo $e \notin E(G)$, $G + e$ ... tiene ciclos

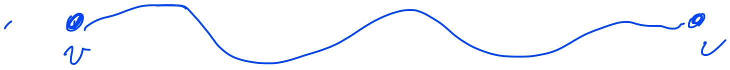


¿Como determinar si un grafo es conexo?

$G = (V, E)$ es conexo ~~si y solo si~~:

$\Longleftrightarrow$ tiene un árbol cobertor como subgrafos.

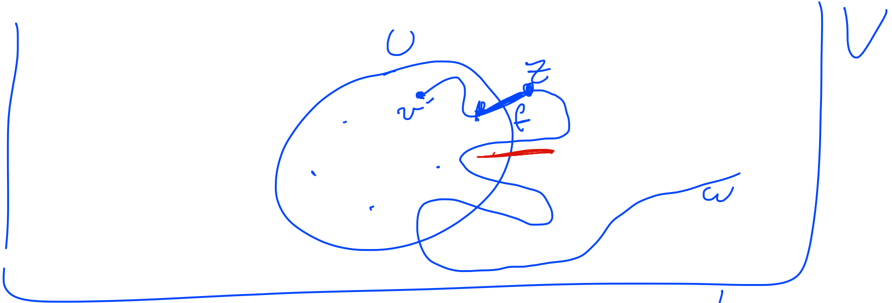
$\Longleftrightarrow$ $\exists$ al menos un camino entre cualquier par de vértices



Teorema: Caracterización por cortes de conexidad

Teorema

$G = (V, E)$ es conexo si y solo si para todo $U : \emptyset \subsetneq U \subsetneq V$, $\delta_E(U) \neq \emptyset$.



Dem: $\Rightarrow$ $\exists\, w \notin U$, $\exists\, v \in U$. G conexo $\Rightarrow$ $\exists$ camino de v a w, P.
En la lista de vértices de P, tomar z el primer vértice fuera de U.
la arista anterior a z. está en $\delta_E(U)$.

$\Leftarrow$ Si G no es conexo $\longrightarrow$

Corolario

Sea $U \subseteq V(G)$, $U \neq \emptyset$.

Corolario

U es componente conexa de G si y solo si $G[U]$ es conexo y $\delta(U) = \emptyset$

Problemas de conectividad. Generación por aristas.

Problema importante 1:

Dado un grafo G y una función de costo $c\colon E \to \mathbb{R}$.

Problema del árbol cobertor/generador de costo mínimo. MST

Encontrar $F \subseteq E$ de costo $c(F) = \sum_{e \in F} c(e)$ mínimo tal que (V, F) es árbol

Generación (span) de aristas

- Decimos que un conjunto de aristas F genera una arista $e = uv$ (esté o no en F) si en F existe un u-v camino. Escribimos $e \in \text{span}(F)$
- Decimos que un grafo H genera a otro grafo H' si $E(H)$ genera todas las aristas de H'.
  $E(H') \subseteq \text{span}(E(H))$

Si H genera a H'
¿Qué podemos decir de las componentes conexas de H respecto a las de H'?

$cc(H) \leq cc(H')$