MA3705. Algoritmos Combinatoriales 2020.
Profesor: José Soto
Escriba(s): Matías Neto, y Matías Vera.
Fecha: 4 de Septiembre de 2020.

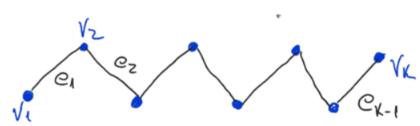
Cátedra 2

1. Subgrafos, conectividad y componentes conexas

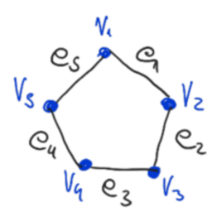
Antes de comenzar, se hace necesario definir una notación:

- Cada vez que se diga G grafo, se refiere a un grafo simple a menos que se diga lo contrario.
- Si A es conjunto y $v \notin A$, $\quad A + v = A \cup \{v\}$.
- Si A es conjunto y $v \in A$, $\quad A - v = A \backslash \{v\}$.
- Si A es conjunto $\binom{A}{k}$ es la colección de conjuntos de tamaño k en A.
- Si G es grafo, entonces $E(G) \subseteq \binom{V}{2}$.
- $[n] = \{1, 2, \cdots, n\} = [1, n] \cap \mathbb{Z}$, y $[0] = \emptyset$.

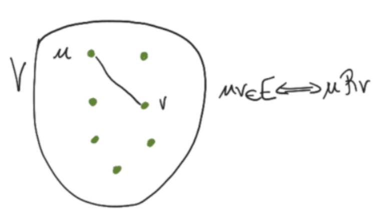
Ejemplo 1. Camino de largo $k-1$ P_{k-1}



Ejemplo 2. Ciclo C_5



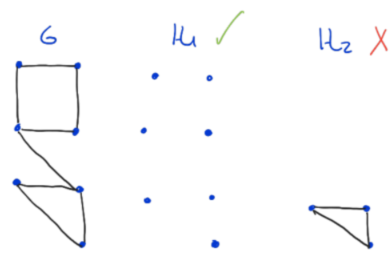
Ejemplo 3. Una relación en un conjunto finito puede verse como grafo, R Relación simétrica sobre V



Definición 1. Subgrafos.
$H = (V'.E')$ es un subgrafo de $G = (V, E)$ si:

- H es grafo
- $V' \subseteq V$
- $E' \subseteq E$

Definición 2. Cobertor.
Un subgrafo H de G es cobertor si $V(H) = V(G)$



Definición 3. Inducido. EL grafo inducido por $W \subseteq V$ es $G[W] = (W, E[W])$

Notación 1. *Grafo obtenido al borrar una arista* $G - e = (V, E - e)$

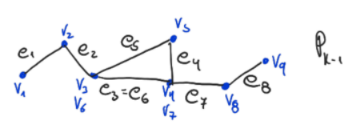
Notación 2. *Grafo obtenido al borrar un vértice* $G - v = G[V - v]$

1.1. Conceptos básicos de conectividad en grafos

Sea G=(V,E) un grafo, se define:

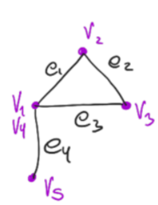
Definición 4. Paseo (*Walk*). Una secuencia de aristas $(A_k)_{k \in K} \subseteq E$ tal que $\forall k \in K$ A_k comparte extremo con A_{k+1}, es decir, para la cual existe un secuencia de vértices.

Ejemplo 4. Paseo de 8 aristas



Definición 5. Sendero(*Trail*). Paseo que no repite aristas

Ejemplo 5. Paseo de 4 aristas

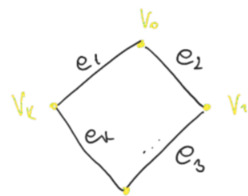


Definición 6. Camino(*Path*). Paseo que no repite aristas ni vértices.

Definición 7. Paseo abierto/cerrado. Un paseo con secuencia de vértices $(v_i)_{i\in[k]}$de largo $k \in \mathbb{N}$ se dice cerrado si $v_1 = vk$.

Definición 8. Ciclo. Paseo cerrado que no repite vértices ni aristas

Ejemplo 6. Ciclo de k aristas



1.2. Lemas de conectividad

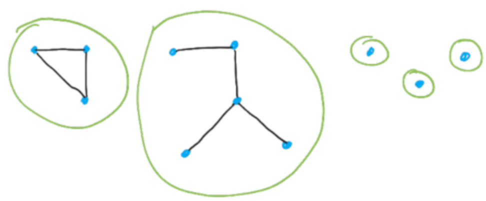
Lema 1. *Si existe paseo de u a v, entonces existe camino de u a v.*

Definición 9. Relación *ser alcanzable* en G V es alcanzable desde u, o $u \sim_G v$, si $\exists u - v$ camino en G.

Lema 2. *$\sim_G$ es una relacion de equivalencia en V(G).*

Definición 10. Componentes conexas. Las clases de equivalencia de $\sim_G$ son las componentes conexas de G.

Ejemplo 7. Grafo con 5 componentes conexas



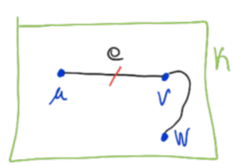
Definición 11. Grafo conexo. Si G tiene una sola componente conexa: G es conexo.

1.3. Componentes conexas de un grafo.

Notación 3. *Llamamos $cc(G)$ al numero de componentes conexas de $G = (V, E)$.*

Lema 3. *Si G es aciclico entonces $cc(V, E) = |V| - |E|$.*
Demostacion:
Se demostrara usando inducción sobre —E—.

- $|E| = 0$ *En este caso se obtiene directamente que $cc(G) = |V|$*
- $|E| \geq 1$ *Sea $c \in E$ con $e = uv$. Sea k la componente conexa que contiene a u,v. En $G - e$ todas las componentes excepto k se mantienen, pero k se divide en 2, es decir, $\forall w \in k$ se tiene que $w \sim_G uow \sim_G v$. Probemos lo anterior.*



Cada vértice de k se conecta con w. Si el camino no ocupa e $w \sim_{G-e} u$, *si lo ocupa, pasa por v, luego* $w \sim_G v$. *De hecho, vía contradicción, si* $u \sim_G v$ *implica que Q camino en* $G - e$, *luego* $G + e$ *es un ciclo, lo cual es una contradicción. Concluyendo con que el numero de componentes conexas aumento en 1:* $cc(G-e) = cc(G) + 1 \implies cc(G) = cc(G-e) + 1 = |V| - |E - e| + 1 = |V| - |E| + 1 - 1$.

2. Arboles y cortes

2.1. Arboles, Bosques y Hojas

Definición 12. Árbol Un árbol es un grafo conexo y acíclico.

Ejemplo 8. Árbol de 7 vértices

Definición 13. Bosque Un bosque es un grafo acíclico, cuyas componentes conexas son arboles.

Definición 14. Hoja Una hoja es un vértice de grado 1. Alguna propiedades:

- Todo grafo conexo contiene un árbol cobertor
- Todo grafo contiene un bosque cobertor.
- Todo bosque con al menos una arista tiene 2 hojas.

Además, un grafo G es árbol si y solo si:

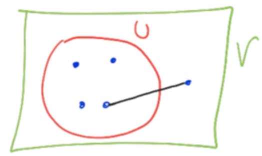
- G es conexo y acíclico
- Para todo u, v existe exactamente un camino de u a v en G.
- G es conexo y tiene a lo mas $|V| - 1$ aristas.
- G es conexo y $\forall e \in E(G)$, $G - e$ no es conexo.
- G es acíclico y tiene al menos $|V| - 1$ aristas.
- G es aciclico y $\forall e \notin E(G)$, $G + e$ tiene ciclos.

2.2. Caracterización de grafos conexos y componentes conexas

Un grafo G=(V,E) es conexo si y solo si:

- Tiene un árbol cobertor como subgrafo
- Existe al menos un camino entre cualquier par de vértices.

Teorema 1. *Caracterización por cortes de conexidad G=(V,E) es conexo si y solo si para todo* $U : \emptyset \not\subseteq U \not\subseteq V$, $\delta_E(U) \neq \emptyset$
Demostración:
($\implies$ *)*
$\exists W \notin U, \exists v \in U$, *G es conexo* $\implies \exists P$ *camino de v a w. Ahora, si tomamos en la lista de vertices del camino P al primer vertice que esta fuera de U, la arista anterior a z esta en* $\delta_E(U)$



($\Longleftarrow$)
Si G no es conexo, existen al menos dos componentes conexas, sea U una componente conexa (contradecir que $\delta_E(U) \neq \emptyset$)

Sea $U \subseteq V(G)$, $U \notin \emptyset$

Corolario 1. *U es componente conexa de G si y solo si G[U] es conexo y $\delta(U) = \emptyset$*

3. Problemas de conectividad. Generación de aristas

Dado un grafo G y una función de costo c:E $\longleftarrow \mathbb{R}$.

Ejercicio 1. Problema del árbol cobertor/generador de costo mínimo. MST
Encontrar $F \subseteq E$ de costo $c(F) = \sum_{e \in F} c(e)$ mínimo tal que (V,F) es árbol.

Notación 4. *Decimos que un conjunto de aristas de F genera una arista $e = uv$(este o no en F) si en F existe $u - v$ camino. Escribimos $e \in span(F)$*

Notación 5. *Decimos que un grafo H genera a otro grafo H'si E(H) genera todas las aristas de H'. $E(H') \subseteq span(E(H))$.*
Si H genera a H'.
¿Que podemos decir de las componentes conexas de H respecto de las de H'?
$cc(H) \leq cc(H')$