Clase 06 MA3705. 25 de septiembre 2020.

Tabla

- Matroides (definición).
- Base/Independiente de tamaño/peso máximo
- Algoritmo de Kruskal
- Caracterización de matroides.

Matroides (definición)

Sistemas de independencia y bases

$(S, \mathcal{I})$ es sistema de independencia.

S: Conjunto finito de referencia.

$\mathcal{I} \subseteq 2^S$: Los conjuntos $J \in \mathcal{I}$ se llaman independientes.

si $J \in 2^S \setminus \mathcal{Y}$ es dependiente.

$(S, \mathcal{I})$ satisface:

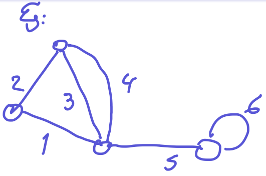
- (vacío es independiente): $\emptyset \in \mathcal{I}$. $[\mathcal{Y} \neq \emptyset]$
- (cerrado para inclusión): $(\forall X \subseteq Y \subseteq S) \quad Y \in \mathcal{I} \implies X \in \mathcal{I}$.

Bases de conjuntos

Sea $(S, \mathcal{I})$ un sistema de independencia.
Sea $X \subseteq S$ un subconjunto de S.
B es base de X si:

- (independiente): $B \in \mathcal{I}$
- (maximal): $\forall x \in X \setminus B, B + x \notin \mathcal{I}$. $\Leftrightarrow \nexists Y \in \mathcal{Y}.\ B \subsetneq Y \subsetneq X$.

Ejemplos importantes



G

Matroide gráfica de un multigrafo $G = (V, E)$

$\mathcal{I} := \mathcal{I}(G) = \{F \subseteq E : F \text{ es acícliclo}\}$

$(E, \mathcal{I})$: Matroide gráfica de G.

$X = \{1,2,3,4\}$

Bases de X

12
13
14
23
24

todas tienen tamaño 2.

$\text{rango}(X) = 2$.

$Y = \{6\}$

Bases de Y $= \emptyset$.

$\{1,2,5\} \in \mathcal{I}(G)$

$\{3\} \in \mathcal{I}(G)$

$\{6\} \notin \mathcal{I}(G)$

$\{3,4\} \notin \mathcal{I}(G)$.

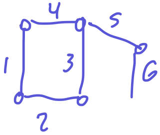
$\{\underbrace{1,2,3}_{},5\} \notin \mathcal{I}(G)$.

Ejemplos importantes (2)

$M \subseteq E$ matching si cada par de aristas no comparten un extremo

Matchings de un (multi)grafo $G = (V, E)$

$(E, \underbrace{\{\text{matchings}\}}_{\mathcal{M}})$: Sistema de matchings de G.



$\mathcal{M} \ni \{1,3\}$
$\{2,5\}$

Bases de E:

$\{2,4,6\}$
$\{1,3,6\}$
$\{2,5\}$

No tienen el mismo cardinal.

Bases de $\{1,2,6\}$

$\{1,6\}$
$\{2,6\}$

Sistemas de vectores

$v_1, \ldots, v_m$ de vectores en un espacio vectorial.
$I \subseteq [m]$ es independiente si $(v_i)_{i \in I}$ es linealmente independiente en el espacio vectorial.
$([m], \text{independientes})$: Matroide lineal.

Ej: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$([5], \mathcal{L})$

independiente

Ej: $\{1\} \in \mathcal{L}$
$\{3\} \notin \mathcal{L}$
$\{1,2\} \in \mathcal{L}$

Bases tienen el mismo cardinal.

Bases de $\{1,2,3,4,5\} = \{5,4\}; \{1,2\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,5\}$, ~~$\{4,5\}$~~ .

$\text{Rango}(\{1,2,3,4,5\}) = 2$

Obs: Todo conjunto independiente $I \subseteq X$ se puede extender a una base de X.

$(S, \mathcal{Y}) \leftarrow$ sist. de independencia

$X \subseteq S$.

Sea $I \subseteq X$, $I \in \mathcal{Y}$. $B \leftarrow I$.
Para cada $e \in X \setminus I$
Si $B + e \in \mathcal{Y}$
$B \leftarrow B + e$.
Return B

Base de X que contiene a I.

Greedy:
↳ Avaro, Glotón.

Dem:
Sea B al final.
Si B no fuera base
$\exists f \in X \setminus B$. $B + f \in \mathcal{Y}$
En el momento en que f fue visitado
B' era el conjunto que llevábamos,
$B' + f \notin \mathcal{Y}$. Pero $B' + f \subseteq B + f \in \mathcal{Y}$.

Contradicción

Cuantificar eficiencia: Oráculo de independencia

Alg glotón

Sea $(S, \mathcal{Y})$ sist. de independencia

$B \leftarrow \emptyset$

$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$

Para i de 1 a m

  Si $\boxed{B + s_i \in \mathcal{Y}}$ $O(1)$ oráculo

    $B \leftarrow B + s_i$ $O(1)$ operación

Devolver $B \leftarrow O(1)$

Def: Oráculo de independencia

↳ función que testea en 1 unidad de tiempo si un conjunto $A \in \mathcal{Y}$.

Complejidad:

$O(m)$ tiempo

$O(m)$ llamadas al oráculo

Polinomial:

Tpo y # de llamadas al oráculo son polinomiales.

$(S, \mathcal{I})$ sist. de independencia

Propiedad útil:

Sea $\pi: s_1, \ldots, s_m$ es un ordenamiento de S en un sistema de independencia $(S, \mathcal{I})$.

Los prefijos de π son los conjuntos $S_i = \{s_1, \ldots, s_i\}$, para $i \in [m] + 0$.

Si J es la salida del algoritmo glotón en π entonces para todo prefijo, $J \cap S_i$ es base de $\cancel{S}$. S_i

$\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$

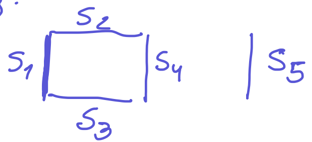
$J = \{s_1, s_4, s_5\}$

Ojo:

$J \cap \{s_2, s_3\} = \emptyset$

Ej:

Matchings



$J = \{s_1, s_4, s_5\}$

$J \cap S_3 = \{s_1, s_4, s_5\} \cap \{s_1, s_2, s_3\}$

$= \{s_1\}$ base de S_3

Base/Independiente de tamaño/peso máximo

Problemas importantes

Sea $(S, \mathcal{I})$ un sistema de independencia y $w \colon S \to \mathbb{R}$ una función de peso.

1. Encontrar una base de S de tamaño máximo.
2. Encontrar una base de S de peso $w(S)$ máximo.
3. Encontrar un conjunto independiente $J \in \mathcal{I}$ de peso $w(J)$ máximo.

En general estos problemas son difíciles (no existen algoritmos polinomiales). Hay un caso donde podremos resolverlo.

Matroides: Sistemas de independencia con equicardinalidad de bases

Un sistema de independencia $(S,\mathcal{I})$ satisface **equicardinalidad de bases** si para todo $X \subseteq S$ las bases de X tienen el mismo cardinal.

Cuando un sistema satisface esta propiedad llamamos rango $r(X)$ de un conjunto X al único tamaño posible de las bases de X

Ejemplos:

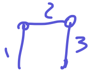
acíclicos.

si $F \subseteq E$. $G=(V,E)$

◦ Matroide Gráficos $(E, \mathcal{G})$ $\quad$ rango$(F) = |V| - cc(V,F)$

◦ Matroide lineal $([m], \mathcal{L})$ $\quad$ rango$(X) = \dim(\langle\{v_i : i \in X\}\rangle)$

• Matching no son matroide.



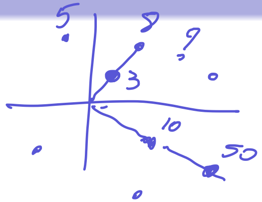
$\{1,3\}$, $\{2\}$ son bases de $\{1,2,3\}$ de distinto tamaño.

Base de tamaño máximo en matroides.

Sea $(S, \mathcal{I})$ una matroide.
¿Cómo encontramos una base de S de tamaño máximo?

R: Glotón

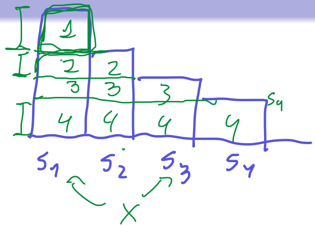
Base de peso máximo en matroides.



Sea $(S, \mathcal{I})$ una matroide y $w : S \to \mathbb{R}$
¿Cómo encontramos una base de S de peso máximo?

Un lema útil

Sea $X \subseteq S = \{s_1, \ldots, s_n\}$. $w\colon S \to \mathbb{R}$.
$w(s_1) \geq w(s_2) \geq \ldots w(s_n)$.
Sea s_{n+1} un elemento artificial con $w(s_{n+1}) = w(s_n)$.



$$w(X) = w(s_{n+1})|X| + \sum_{i=1}^{n} |X \cap S_i|(w(s_i) - w(s_{i+1}))$$

Propuesta: telescópica

Obs: $|X \cap S_{i+1}| - |X \cap S_i| = \mathbb{1}\{s_{i+1} \in X\}$.

$S = s_1, s_2, \ldots, s_n$

$w(s_1) \geq w(s_2) \geq \ldots \geq w(s_n)$

Algoritmo glotón en orden decreciente de pesos

Sea $(S, \mathcal{I})$ una matroide. La salida $\underline{\mathrm{ALG}}$ de este algoritmo es una base de peso máximo de $(S, \mathcal{I})$

Demostración: Sea OPT la mejor base.

Sea ALG el conjunto entregado (ALG es base de S)

$$w(ALG) = \sum_{i=1}^{n} |ALG \cap S_i| \underbrace{(w(s_i) - w(s_{i+1}))} + \underset{\underset{|OPT|}{\parallel}}{|ALG|} \cdot w(s_{n+1})$$

$w(s_n)$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} |OPT \cap S_i| (w(s_i) - w(s_{i+1}))_{\geq 0} + |OPT| \cdot w(s_{n+1}) = w(OPT)$$

$$|OPT \cap S_i| \leq |B_i| \underset{\text{Matroide}}{=} |ALG \cap S_i|$$

obs: • $ALG \cap S_i$ es base de S_i

• $OPT \cap S_i \subseteq S_i$ y $OPT \cap S_i \subseteq OPT \in \mathcal{I} \Rightarrow OPT \cap S_i \in \mathcal{I} \Rightarrow \exists$ base de S_i $B_i \supseteq OPT \cap S_i$