Clase 07 MA3705. 28 de septiembre 2020.

Tabla

- Bases/Independientes más livianos/pesados en matroides.
- Algoritmo de Kruskal
- Caracterización de matroides.
- Nomenclatura y propiedades.

Base/Independiente más livianos/pesados en matroides

Un pequeño desvío: restricciones y borrado en matroides

Borrado/restricción de matroides

Sea $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ una matroide y $T \subseteq S$. Se define la restricción a T
$\mathcal{M}|_T = (T, \{X \in \mathcal{I} \colon X \subseteq T\})$.
También se define matroide borrando T
$\mathcal{M} \setminus T :=$

Problemas:

Sea $(S, \mathcal{I})$ una matroide y $w \colon S \to \mathbb{R}$ una función de peso.

1. Encontrar una base de S de tamaño máximo:
2. Encontrar una base de S de peso $w(S)$ máximo:
3. Encontrar una base de S de peso $w(S)$ mínimo:
4. Encontrar un conjunto independiente $J \in \mathcal{I}$ de peso $w(J)$ máximo:

Algoritmo de Kruskal

Consecuencia: Algoritmo de Kruskal para MST

Algoritmo de Kruskal

Entrada: $G = (V, E)$ conexo
Ordenar E como $e_1, \dots, e_m$ con
$w(e_1) \leq w(e_2) \leq \cdots \leq w(e_m)$
$F \leftarrow \emptyset$ **para** i *de 1 a* m **hacer**
  si $F + e_i$ *acíclico* **entonces**
    $F \leftarrow F + e_i$
  fin
fin
devolver $T = (V, F)$

Algoritmo de Kruskal (implementación)

Entrada: $G = (V, E)$ conexo
Ordenar E como $e_1, \ldots, e_m$ con
$w(e_1) \leq w(e_2) \leq \cdots \leq w(e_m)$
Crear partición de V con n singletons.
$F \leftarrow \emptyset$ **para** i *de 1 a* m **hacer**
  Sea $e_i = u_i v_i$.
  si *Conjunto*$(u_i) \neq$ *Conjunto*(v_i) **entonces**
    $F \leftarrow F + e_i$
    Union(Conjunto(u_i), Conjunto(v_i))
  fin
fin
devolver $T = (V, F)$

Existen estructuras de datos para mantener particiones de n elementos:

- Determinar el conjunto que contiene a un elemento en tiempo $O(\log n)$
- Unir dos conjuntos (Union) en $O(\log n)$.

Notas

Caracterización de matroides

¿Cómo demostrar que un sistema es matroide?

Un sistema de independencia $(S, \mathcal{I})$ es matroide si y solo si (cualquiera de las siguientes se tiene).

1. **Equicardinal de Bases:** Para todo $X \subseteq S$ todas las bases de X tienen el mismo cardinal.
2. **Glotón:** Para todo peso $w\colon S \to \mathbb{R}$, el algoritmo glotón (ordenado en orden decreciente) devuelve base de peso máximo en S.
3. **Aumento:**

$$(\forall X, Y \in \mathcal{I}, |X| < |Y|) \quad \exists z \in Y \setminus X, X + z \in \mathcal{I}.$$

4. **Aumento débil:**

$$(\forall X, Y \in \mathcal{I}, |X \setminus Y| = 1, |Y \setminus X| = 2) \quad \exists z \in Y \setminus X, X + z \in \mathcal{I}.$$

Equivalencias

Equivalencias

Equivalencias

Nomenclautra y propiedades

Bases en una matroide $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$

Bases de una matroide

Independientes maximales.

Propiedades

1. Existe al menos una base.
2. Ninguna base contiene otra.
3. **Intercambio**. Si P, Q son bases y $x \in P \setminus Q$ entonces existe $y \in Q \setminus P$, con $P - x + y$ base.
4. **Intercambio negativo**. Si P, Q son bases y $x \in P \setminus Q$ entonces existe $y \in Q \setminus P$, con $Q + x - y$ base.

Circuitos en una matroide $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$

Circuitos

Los circuitos son los dependientes minimales.

Propiedades

1. $\emptyset$ no es circuito.
2. Ningún circuito contiene a otro distinto.
3. **Eliminación de circuitos**. Si C, D son circuitos distintos y $e \in C \cap D$ entonces existe circuito $K \subseteq C \cup D - e$.

Propiedad del circuito único

Teorema

Si $X \in \mathcal{I}$, $e \in S \setminus X$, entonces existe a lo más un circuito $C \subseteq X + e$.

Rango de una matroide

Rango

$r(X) = \text{máx}\{|I| \colon I \subseteq X, I \in \mathcal{I}\}$

Propiedades

1. $0 \leq r(X) \leq |X|$
2. $X \subseteq Y \implies r(X) \leq r(Y)$
3. $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$
4. $r(X + e) - r(X) \in \{0, 1\}$

Notas:

Span en una matroide

span

$\operatorname{span}(X) = \{e \in S \colon r(X+e) = r(X)\}$

Propiedades

1. $X \subseteq \operatorname{span}(X) = \operatorname{span}(\operatorname{span}(X))$.
2. $X \subseteq Y \implies \operatorname{span}(X) \subseteq \operatorname{span}(Y)$
3. Si $e \notin \operatorname{span}(X)$,
   $f \in \operatorname{span}(X+e) \implies e \in \operatorname{span}(X+f)$.

Más span:

Otras formas equivalentes:

$e \in \mathrm{span}(X) \iff$

1. $r(X+e) = r(X)$
2. $\exists C$ circuito con $e \in C \subseteq X + e$
3. $\forall B$ base de X, $e \in \mathrm{span}(B)$
4. $\exists B$ base de X, $e \in \mathrm{span}(B)$

De hecho, $\mathrm{span}(X)$ es el único conjunto Y maximal tal que $Y \supseteq X$ y $r(Y) = r(X)$.

Notas: