Clase 07 MA3705. 28 de septiembre 2020.

Tabla

- Bases/Independientes más livianos/pesados en matroides.
- Algoritmo de Kruskal
- Caracterización de matroides.
- Nomenclatura y propiedades.

Base/Independiente más livianos/pesados en matroides

$\mathcal{M} = (S, \mathcal{Y})$. $\forall X \subseteq S$. Bases de X tienen igual tamaño

Sist. de Indep.

Borrado/restricción de matroides

Sea $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ una matroide y $T \subseteq S$. Se define la restricción a T
$\mathcal{M}|_T = (T, \{X \in \mathcal{I} : X \subseteq T\})$. ← Es matroide
También se define matroide borrando T
$\mathcal{M} \setminus T := \mathcal{M}|_{(S \setminus T)}$

$\mathcal{M}$:

Sea $(S, \mathcal{I})$ una matroide y $w: S \to \mathbb{R}$ una función de peso.

1. Encontrar una base de S de tamaño máximo: Glotón en cualquier orden.
2. Encontrar una base de S de peso $w(S)$ máximo: Glotón: ordenados de mayor a menor peso.
3. Encontrar una base de S de peso $w(S)$ mínimo: Glotón: ordenados de menor a mayor peso
4. Encontrar un conjunto independiente $J \in \mathcal{I}$ de peso $w(J)$ máximo:

Sea $S^+ = \{e \in S : w(e) \geq 0\}$

Bases de peso máximo en $\mathcal{M}|_{S^+}$ son indep. de peso máximo en $\mathcal{M}$.

[Glotón: ordenado de mayor a menor peso, sin considerar los eltos de peso negativo.

Algoritmo de Kruskal

Consecuencia: Algoritmo de Kruskal para MST

$G=(V,E)$ conexo

$M(G) = (E, \text{bosques})$ es matroide y sus bases (de E) son los árboles generadores.

Glotón para base de peso mínimo.

Algoritmo de Kruskal

Entrada: $G = (V, E)$ conexo ✓

Ordenar E como $e_1, \ldots, e_m$ con $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \cdots \leq w(e_m)$ ← menor a mayor

$F \leftarrow \emptyset$

para i **de** 1 **a** m **hacer**

  si $F + e_i$ *acíclico* **entonces**

    $F \leftarrow F + e_i$

  fin

fin

devolver $T = (V, F)$

$F+e_i$ acíclico

Alt: BFS en $F+e_i$ toma $O(n+m)$

Complejidad:

- Ordenar m objetos toma $O(m \log m)$
- m iteraciones
  - $O(1)$ oráculo de indep.
  - $O(1)$ operaciones

Total:

$O(m \log m)$ operaciones con $O(m)$ llamadas al oráculo

Implementación simple de Kruskal para MST

Algoritmo de Kruskal (implementación)

Entrada: $G = (V, E)$ conexo
Ordenar E como $e_1, \ldots, e_m$ con
$w(e_1) \leq w(e_2) \leq \cdots \leq w(e_m)$
Crear partición de V con n singletons.
$F \leftarrow \emptyset$ **para** i *de 1 a* m **hacer**
  Sea $e_i = u_i v_i$.
  si *Conjunto*$(u_i) \neq$ *Conjunto*(v_i) **entonces**
    $F \leftarrow F + e_i$
    Union(Conjunto(u_i), Conjunto(v_i))
  fin
fin
devolver $T = (V, F)$

$O(m \log m)$ $O(1)$ $O(\log n)$ $O(\log n)$ $O(1)$

UNIÓN-FIND.

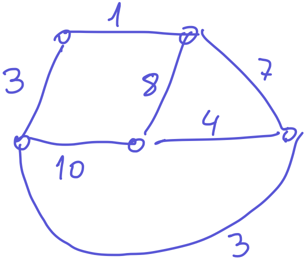
Existen estructuras de datos para mantener particiones de n elementos:

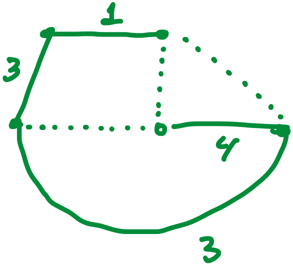
- Determinar el conjunto que contiene a un elemento en tiempo $O(\log n)$
- Unir dos conjuntos (Union) en $O(\log n)$.

m iteraciones.

total : $O(m \log m) + m \cdot O(\log n) + O(1) = O(m \log n)$.

Notas





Kruskal necesita ordenar. $\underbrace{\Omega(m \log m)}_{\text{pasos}} = \Omega(m \cdot \log n)$

$\log m = \Theta(\log n)$

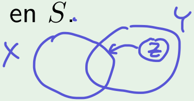
$n - 1 \leq m \leq n^2$

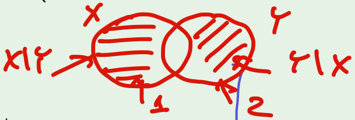
Caracterización de matroides

¿Cómo demostrar que un sistema es matroide?

Un sistema de independencia $(S, \mathcal{I})$ es matroide si y solo si (cualquiera de las siguientes se tiene).

1. **Equicardinal de Bases:** Para todo $X \subseteq S$ todas las bases de X tienen el mismo cardinal.
2. **Glotón:** Para todo peso $w \colon S \to \mathbb{R}$, el algoritmo glotón (ordenado en orden decreciente) devuelve base de peso máximo en S.
3. **Aumento:**





$$(\forall X, Y \in \mathcal{I}, |X| < |Y|) \quad \exists z \in Y \setminus X, X + z \in \mathcal{I}.$$

4. **Aumento débil:**

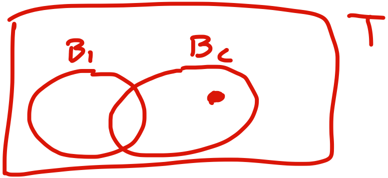
$$(\forall X, Y \in \mathcal{I}, |X \setminus Y| = 1, |Y \setminus X| = 2) \quad \exists z \in Y \setminus X, X + z \in \mathcal{I}.$$

Equivalencias

(3) Aumento $\Rightarrow$ (1) Equicardinalidad de las bases.

Dem: Sea $T \subseteq S$ conjunto

Sea B_1, B_2 bases de T



Si no tienen el mismo tamaño

(*) $|B_1| < |B_2|$

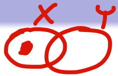
Por aumento: $\exists\, z \in B_2 \setminus B_1$ tq $B_1 + z \in \mathcal{I}$.

$B_1 + z \subseteq T$

$\rightarrow\leftarrow$ B_1 era base.

$\therefore |B_1| = |B_2|$

Equivalencias

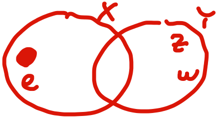
Aumento débil $\Rightarrow$ Aumento. pdq  con $X, Y \in \mathcal{Y}$

$|X| < |Y| \Rightarrow \exists z : X+z \in \mathcal{Y}$. $\quad z \in Y \setminus X$

Inducción: en $k = |X \setminus Y|$

$k=0$ / obvio $X \subseteq Y \Rightarrow$ $X+z \in \mathcal{Y} \ \forall z \in Y$.

$k \geq 1$



Sea $e \in X \setminus Y$.

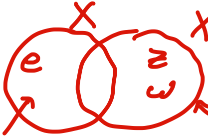
$X' = X - e$. $X', Y \in \mathcal{Y}$. $|X' \setminus Y| = k-1$

Por H.I. se tiene aumento $\exists z \in Y$ tq $X'+z \in \mathcal{Y}$.

$X - e + z \in \mathcal{Y}$

Pero $|(X-e+z) \setminus Y| = k-1$, $|X-e+z| = |X| < |Y|$

H.I. $\Rightarrow \exists w \in Y \setminus (X-e+z)$ tq $X-e+z+w \in \mathcal{Y}$.



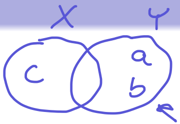
$X-e+z+w$ indep. $\rightarrow$ Aumento débil $\quad \{z,w\} \subset Y \setminus X$.

$|X \setminus (X-e+z+w)| = 1$ $\quad |(X-e+z+w) \setminus X| = 2$

$\exists x \in \{z, w\}$ tq $X + x \in \mathcal{Y}$.

Equivalencias

Eq. base ⇒ Aumento débil.



$X, Y \in \mathcal{I}$.

$Y \setminus X = \{a, b\}$

$X \setminus Y = \{c\}$

. Caso trivial: $X \cup Y = Y + c \in \mathcal{I}$.

esto $\Rightarrow$ $X + a \in \mathcal{I}$

$X + b \in \mathcal{I}$.

. Caso difícil: $Y + c \notin \mathcal{I}$.

Bases de $\underbrace{Y + c}$. : Y es base.

Rec: Todo independiente ~~de~~ $\subseteq Y + c$ se puede extender a una base.

$$X \in \mathcal{I}. \quad X \subseteq Y + c \longrightarrow \exists \text{ base de } Y + c,\ B \text{ tq } X \subseteq B \subseteq Y + c$$

Como Hipótesis $|B| = |Y|$. (bases de $Y + c$) $\therefore B = X + a$ ó $B = X + b$

Nomenclautra y propiedades

Bases en una matroide $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$

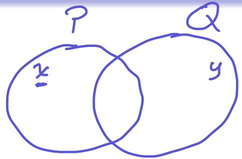
Bases de una matroide

Independientes maximales.

Propiedades

1. Existe al menos una base. ✓
2. Ninguna base contiene otra. ✓
3. **Intercambio**. Si P, Q son bases y $x \in P \setminus Q$ entonces existe $y \in Q \setminus P$, con $P - x + y$ base.
4. **Intercambio negativo**. Si P, Q son bases y $x \in P \setminus Q$ entonces existe $y \in Q \setminus P$, con $Q + x - y$ base.

③

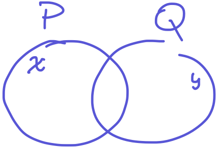


$P-x+y$ es base.

Dem: $P-x$, Q son indep.

$|P-x| < |Q| \underset{\text{Aumento}}{\Longrightarrow} \exists\, y \in Q \setminus (P-x)$ tq $\underbrace{P-x+y}_{\text{base}} \in \mathcal{I}$.

④



$Q+x-y$ es base.

Circuitos en una matroide $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$

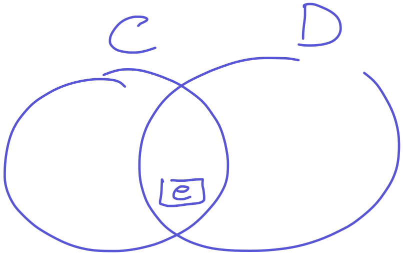
Ej: Grafica.
Circuitos = ciclo.

Circuitos

Los circuitos son los dependientes minimales.

Propiedades

1. $\emptyset$ no es circuito. ✓
2. Ningún circuito contiene a otro distinto. ✓
3. **Eliminación de circuitos**. Si C, D son circuitos distintos y $e \in C \cap D$ entonces existe circuito $K \subseteq C \cup D - e$.



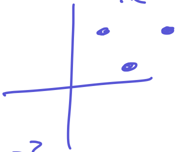
Si $e \in C \cap D$
$\Rightarrow C \cup D - e$ No es independiente

Propiedad del circuito único

Teorema

Si $X \in \mathcal{I}$, $e \in S \setminus X$, entonces existe a lo más un circuito $C \subseteq X + e$.

Ej: $\mathbb{R}^2$



· Todo trío de puntos en $\mathbb{R}^2$ no paralelos son un circuito