MA3705. Algoritmos Combinatoriales 2020.
Profesor: José Soto
Profesores Auxiliares: Antonia Labarca, Víctor Saez

Tarea 2.

Fecha entrega: Jueves 5 de Noviembre, 23:59. Por u-cursos.

Instrucciones:

1. **Extensión máxima**: Entregue su tarea en a lo más **14 planas**.
   Indicación relevante: No copie el enunciado de la tarea en su desarrollo.

2. **Formato:** La tarea debe entregarse en formato pdf, con fondo de un solo color (blanco de preferencia). *No se aceptarán escaneos en .jpg u otro formato de imágenes.*

   - Si desarrolla su tarea en papel, entréguelo escaneados o en fotos de alta calidad y convertido a un archivo pdf único.
   - Puede desarrollar su tarea en algún formato manuscrito digital (tablet u otro instrumento), pero la salida debe ser un archivo .pdf único.
   - Si entrega su tarea (o parte de ella) tipeada, dicha parte debe estar escrita en Latex y *debe adjuntar el archivo .tex y cualquier archivo fuente adicional que usó para generar el pdf.* Debe subir estos archivos en ucursos adicionalmente al pdf. **No podrá adjuntar links a sistemas de edición externa como overleaf**.

3. **Tiempo de dedicación:** El tiempo estimado de *desarrollo* de la tarea es de 8 horas de dedicación. Esto no considera el tiempo de estudio previo, el tiempo dedicado en asistir a cátedras y auxiliares, ni el tiempo para *ponerse al día.* Tendrá un plazo de 14 días para entregarlo *sin tiempo adicional.* No espere hasta el último momento para escanear o fotografiar adecuadamente su tarea y cambiarla al formato solicitado (pdf). Entregue con suficiente anticipación a la hora límite. Note que ucursos permite sobreescribir lo que ya ha subido así que puede entregar a medida que vaya completando su tarea.

4. **Política de honestidad y colaboración** Algunos problemas tienen colaboración autorizada, para entender los límites y reglas al respecto usted debe leer la política de honestidad y colaboración del curso: `https://www.u-cursos.cl/ingenieria/2020/2/MA3705/1/blog/` Recuerde que si decide colaborar en un problema debe anotar el nombre de la(s) persona con las que colaboró al principio de su solución y que se revisará simetría por problema.

5. **Revisión:** Se podrá descontar hasta 1 punto en la nota final por falta de formato o extensión.

La tarea tiene un total de 72 puntos, pero se corregirá bajo un máximo de 60. Es decir, si su puntaje es P, su nota será (10+$\min(P, 60)$)

Problema 1. Colaboración autorizada. Conteo de caminos de largo mínimo - total 20 puntos

Sea $H = (V, E)$ un digrafo acíclico (DAG). Se sabe que todo DAG tiene un orden topológico $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ tal que $v_i v_j \in E \implies i < j$, y que un tal orden se puede encontrar en $O(n+m)$ via una modificación de DFS (puede suponer que tiene acceso a tal procedimiento). Llame $T(i, j)$ al número total de caminos desde v_i a v_j.

a) **(6 puntos)** Encuentre y demuestre una fórmula para calcular $T(i, j)$ en función de H y de $\{T(i, k) \colon k \leq j\}$. Use esto para diseñar un programa dinámico que calcule el número de caminos de s a t para dos nodos s y t fijos. La complejidad de su algoritmo debe ser $O(n+m)$.

En las partes que sigue considere un digrafo $G = (V, E)$ y una función $\ell \colon E \to \mathbb{R}$ de largos para la que **cada ciclo tiene largo estrictamente positivo** (esto es más fuerte que ser conservativo, pero más débil que tener largos positivos). Sean además s y t dos nodos fijos de G.

b) **(6 puntos)** Decimos que un arco $e = uv$ es s-t ajustado si existe un s-t camino de largo mínimo P tal que $e \in P$. Diseñe un algoritmo para encontrar el conjunto $F \subseteq E$ de arcos s-t ajustados de G. Muestre correctitud. ¿Puede lograr un algoritmo de complejidad $O(nm)$?
Indicación: Si $e = uv$ es s-t ajustado, ¿Cuánto debería valer $d(s, u) + \ell(uv) + d(v, t)$? Demuestre que esta condición caracteriza a los arcos s-t ajustados.

c) **(5 puntos)** Demuestre que para el conjunto F de la parte anterior (V, F) es un DAG.

d) **(3 puntos)** Diseñe usando las partes anteriores un algoritmo que calcule el número de s-t caminos de largo mínimo en tiempo $O(nm)$.

Problema 2. Colaboración autorizada. Problema de la mochila I - total 10 puntos

Consideremos n objetos. Cada elemento $j \in [n]$ tiene asociado un valor v_j y un tamaño s_j, ambos enteros positivos. Usted dispone de una mochila de tamaño $K \in \mathbb{N}$ y desea encontrar el conjunto $Q \subseteq [n]$ de objetos de mayor valor total que quepa en la mochila. Se sabe que el problema de la mochila es en general difícil, es decir no existe algoritmo polinomial conocido para resolverlo. Sin embargo existen algoritmos que son pseudopolinomiales (es decir polinomial en el valor de los números involucrados, y no en el número de bits).

Modelaremos el problema de la mochila como un problema de camino de largo máximo en un DAG. Para esto, construiremos un grafo dirigido sin ciclos (DAG) G con nodos $V(G) = \{s\} \cup \{r_{i,j} \colon i \in [K], j \in [n]\}$.

Describa un conjunto de arcos $E(G)$ apropiados, así como una función de largo $\ell \colon E(G) \to \mathbb{R}$ de modo tal que $d(s, r_{i,j})$ represente el máximo valor que se puede obtener usando solo un subconjunto de objetos de $[j]$ en una mochila de tamaño i (en particular, $d(s, r_{K,n})$ será igual al resultado del problema de la mochila) y deduzca un algoritmo $O(Kn)$ para resolver el problema de la mochila.

Problema 3. Sin colaboración. Problema de la mochila II - total 10 puntos

Consideremos ahora el problema del cubrimiento de mochila. Al igual que en el problema anterior, se disponen de n objetos con valores y largos enteros positivos. Dado un entero W, el objetivo del cubrimiento de mochila es encontrar el menor tamaño que debe tener una mochila de modo tal que se puedan poner dentro un subconjunto $Q \subseteq [n]$ de objetos de valor **al menos** W.

Modele este problema como un problema de largo mínimo en un DAG con $O(nW)$ nodos, de manera similar al caso anterior y deduzca un algoritmo $O(nW)$ para resolverlo.

Problema 4. Sin colaboración. Problema de la mochila III - total 12 puntos

Considere la versión fraccional del problema de la mochila. Al igual que antes tenemos n objetos. Cada elemento $j \in [n]$ tiene asociado un valor v_j y un tamaño s_j, ambos enteros positivos y se dispone de una mochila de tamaño $K \in \mathbb{N}$. A diferencia de los problemas anteriores, ahora las objetos son divisibles. Es decir, se puede tomar una fracción $x_j \in [0,1]$ del objeto j. Esta fracción tendrá tamaño $s_j x_j$ y valor $v_j x_j$. El objetivo es decidir las fracciones a tomar de modo que en total éstas quepan en la mochila maximizando el valor guardado en ella.

Este problema se puede modelar directamente como un programa lineal:

$$
\begin{aligned}
\text{(PL)} \quad & \text{máx} \sum_{j\in[n]} x_j v_j \\
& \sum_{j\in[n]} x_j s_j \leq K \\
& \quad x_j \in [0,1], \forall j \in [n]
\end{aligned}
$$

El objetivo de este ejercicio es demostrar que existe una solución óptima de (PL) donde a lo más 1 objeto es *dividido*, es decir, a lo más un objeto j tiene fracción $x_j \in (0,1)$ y todos los demás tienen fracción 0 o 1.

Para esto, supongamos sin pérdida de generalidad que los objetos están ordenados de acuerdo a valor sobre tamaño, es decir

$$\frac{v_1}{s_1} \geq \frac{v_2}{s_2} \geq \cdots \geq \frac{v_n}{s_n}$$

Sea h el índice más grande tal que los primeros h objetos caben en la mochila: $\sum_{j=1}^{h} s_j \leq K$. Si $h = n$ entonces la mejor solución es $x_j^* = 1$, $\forall j \in [n]$. Así que supondremos que $h < n$. Se sabe (del curso de optimización) que (PL) siempre admite una solución y^* **racional** (es decir, donde $y_j^* \in \mathbb{Q}$ para todo j). Llame U al máximo común divisor de todos los denominadores de y_j^* (de modo que $y_j^* U$ es entero) y defina un conjunto de objetos auxiliares *dividiendo* cada objeto $j \in [n]$ en $s_j U$ objetos más pequeños iguales entre sí: $\{a_{ij} : i \in [s_j U]\}$ cada uno de tamaño $s_j/(s_j U) = 1/U$ y de valor $v_j/(s_j U)$. En otras palabras, ahora usted tiene un conjunto auxiliar de objetos $A = \{a_{ij} : j \in [n], i \in [s_j U]\}$ de tamaño $1/U$ donde a_{ij} tiene valor $v_j/(s_j U)$.

a) **(3 puntos)** Considere la matroide $\mathcal{M} = (A, \mathcal{I})$ uniforme de rango KU. Es decir, $\mathcal{I} = \{X \subseteq A : |X| \leq KU\}$. Demuestre que el conjunto $Y^* = \{a_{ij} : j \in [n], i \in [y_j^* U]\}$ es independiente en $\mathcal{M}$.

b) **(3 puntos)** Demuestre que para cualquier conjunto independiente $R \in \mathcal{I}$, se puede encontrar un vector x^R factible para (PL) con $\sum_{j\in[n]} x_j^R v_j = v(R) := \sum_{a\in R} v(a)$.

c) **(3 puntos)** Concluya de las dos partes anteriores que si B es base de $\mathcal{M}$ de valor máximo, entonces x^R es solución óptima para (PL).

d) **(3 puntos)** Use el algoritmo glotón para demostrar que la solución x^* que asigna $x_j^* = 1$ para $j \leq h$, $x_j^* = 0$ para $j \geq h+1$ y $x_h^* = K - \sum_{j=1}^{h} s_j$ es óptima para (PL).

Problema 5. Sin Colaboración. Componentes matroide-conexas - Total 20 puntos

a) **(4 puntos)** Sea $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ una matroide. Demuestre la siguiente propiedad de los circuitos de $\mathcal{M}$.

> (*) Sean C, D circuitos distintos, con $C \cap D \neq \emptyset$. Si $e \in C \setminus D$ y $f \in D \setminus D$ entonces existe un circuito K que contiene a e y f.

Indicación: Llame $S' = C \cup D$ y trabaje en la matroide $\mathcal{M}' = \mathcal{M}|_{S'}$. Sea $g \in C \cap D$ y demuestre que $B = S - e - f, B_e = B + e - g, B_f = B + e - g$ son todos bases de $\mathcal{M}'$. Usando intercambio (negativo) deduzca que existe el circuito K pedido. Use directamente que los circuitos de $\mathcal{M}'$ son circuitos de $\mathcal{M}$.

b) **(4 puntos)** Defina la relación $\sim$ en S como $e \sim f$ si y solo si ($e = f$ o existe un circuito que contiene a $\{e, f\}$). Es directo por definición que $\sim$ es refleja y simétrica (no lo demuestre). Demuestre que $\sim$ es relación de equivalencia.

Las clases de equivalencia de $\sim$ se llaman componentes conexas de la matroide (o componentes matroide-conexas).

c) **(4 puntos)** Sea B una base de la matroide $\mathcal{M}$. Definimos el grafo de intercambios de B como el grafo bipartito $G_B(\mathcal{M}) = (S, E)$ con partes B y $S \setminus B$, donde $ef \in E$ si y solo si $e \in B, f \in S \setminus B, B + f - e \in \mathcal{I}$.

Pruebe que las componentes conexas de $G_B(\mathcal{M})$ son exactamente las componentes matroide-conexas de $\mathcal{M}$.

d) **(4 puntos)** Una inesperada consecuencia del resultado anterior es la siguiente: Demuestre que si e y f están en un mismo circuito de $\mathcal{M}$ entonces también están en un mismo cocircuito de $\mathcal{M}$.
Indicación: Estudie los grafos de intercambios de $\mathcal{M}^*$.

e) **(4 puntos)** Considere el grafo $H = (V, [13])$ siguiente, el árbol generador (V, T) con $T = [8]$ marcado en negrita. Encuentre (dibuje) el grafo de intercambios $G_T(\mathcal{M}(H))$. Use esto para encontrar todas las aristas $j \in [13]$ tales que 6 y j están en algún ciclo de H.