MA3705. Algoritmos Combinatoriales 2020.
Profesor: José Soto
Escriba(s): Sebastián Rojas y Fabián Sepúlveda.
Fecha: 05 de octubre de 2020
(https://youtu.be/VKL1w-gmw2E).

Cátedra 9

1. Revisitando algoritmos.

Con la definición de *span* de un conjunto introducida en la clase anterior, se pueden observar algunas propiedades y cambios en la implementación de algoritmos ya estudiados, los cuales recordaremos a continuación.

Definición 1. Dado un sistema de independencia $(\mathcal{S}, \mathcal{I})$ y un subconjunto X $\subseteq \mathcal{S}$ como el conjunto maximal contenido que deja invariante el sistema de bases de X i.e. $r(span(X)) = r(X)$

1.1. Algoritmo glotón.

Primero que todo, recordemos la implementación vista del algoritmo glotón:

Para un sistema de independencia dado $(\mathcal{S}, \mathcal{I})$, se desea encontrar el conjunto independiente maximal partiendo de algún I $\subseteq$ X, el cual deseamos que siga siendo independiente, por lo que aplicaremos el siguiente algoritmo.

Algorithm 1: Algoritmo glotón

Entrada: $(\mathcal{S}, \mathcal{I})$ Sistema de independencia, X $\subseteq \mathcal{S}$ no vacío, I $\subseteq$ X. Ordenar E como $e_1, ..., e_m$ con $w(e_1) \leq w(e_2) \leq ... \leq w(e_m)$.

$B \leftarrow I$
for $x \in X \backslash I$ **do**
  if $B + x \in \mathcal{I}$ **then**
    $B \leftarrow B + x$
  end
end
return B

el cual adiciona elementos hasta llegar al conjunto independiente más grande contenido en X. Dado que estamos trabajando con matroides, todas las bases de un conjunto tendrán la misma cardinalidad, por lo cual al encontrar un independiente maximal que contenga a I, contenido en X, ya habremos encontrado una base de este. Luego esto nos da una buena caracterización de los elementos que pueden entrar al algoritmo, y por tanto al generado de cierto conjunto objetivo.

Luego este algoritmo nos da una buena forma para encontrar los elementos generados de un conjunto. A través de la noción de *span*, es posible caracterizar si un elemento de $\mathcal{S}$ puede entrar al conjunto que calcula el algoritmo en una iteración dada, según los elementos agregados hasta la iteración anterior.

Teorema 1. *Sea ALG la base de $(\mathcal{S}, \mathcal{I})$ obtenida al aplicar el algoritmo glotón en el orden $s_1, ..., s_n$, con $s_i \in S$ $\forall i \in \{1, ..., n\}$, definimos los conjuntos $S_i = s_1, s_2, ..., s_i$. Por lo tanto*

$s_i \in ALG \iff s_i \notin span(S_{i-1})$

Demostración. Usemos que ALG$\cap$ S_{i-1} es base del conjunto S_{i-1}, dado que es un independiente maximal contenido en este mismo. Adicionalmente, por ser ALG $\cap$ S_{i-1} base de S_{i-1}, poseen el mismo conjunto generado i.e span(ALG$\cap$ S_{i-1}) = span(S_{i-1}). Luego, dada la correctitud en cada interación del algoritmo glotón, tenemos la siguiente equivalencia

$s_i \in ALG \iff ALG \cap S_{i-1} + s_i \in \mathcal{I}$

por tanto no puede ser generado por los elementos adicionados hasta la interación i-ésima. Luego, este elemento s_i no puede estar en el generado hasta la interación (i-1)-ésima

$ALG \cap S_{i-1} + s_i \in \mathcal{I} \iff s_i \notin span(ALG \cap S_{i-1})$

Finalmente, como los generados deben coincidir con los generados por su base, se tiene que

$s_i \notin span(ALG \cap S_{i-1}) \iff s_i \notin span(S_{i-1})$ $\square$

Aterricemos esto entonces a grafos buscando árboles generadores de peso mínimo, los cuales seguirán la misma lógica del algoritmo glotón, agregando elementos de peso mínimo mientras sigan siendo independientes.

1.2. Algoritmo de Kruskal

Utilizaremos, como ya recalcamos en la sección anterior, la misma idea que hay detrás del algoritmo glotón, donde iremos agregando elementos mientras sigan siendo independientes, pero de forma previa debemos ordenar los elementos a agregar (en este caso particular, aristas de peso mínimo), de forma tal de obtener un maximal independiente (árbol generador) de peso mínimo.

Algorithm 2: Algoritmo de Kruskal

Entrada: $G = (V, E)$ conexo
Ordenar E como $e_1, ..., e_m$ con $w(e_1) \leq w(e_2) \leq ... \leq w(e_m)$
$F \leftarrow \emptyset$
for *i de 1 a m* **do**
  if $F + e_i$ *es acíclico* $\iff e_i \notin span(F) \iff e_i \notin span(E_{i-1})$ **then**
    $F \leftarrow F + e_i$
  end
end
return $T = (V, F)$

Para la correctitud del algoritmo, basta ver que utiliza la misma secuencia que el algoritmo glotón, ya que los conjuntos dependientes de la matroide gráfica corresponden a los elementos que forman ciclos (circuitos), luego, como cada arista que forme un ciclo sólo forma un único circuito, ésta no se agregará dado el orden creciente en que han sido ordenados inicialmente. Además, el algoritmo termina en tiempo finito por poseer G una cantidad finita de vértices.

Para ver que el algoritmo entrega efectivamente un MST, basta ver que si existiera otra arista que pueda ser agregada, del ciclo que este forma se debería extraer una arista ya insertada, pero los pesos están ordenados de manera creciente, luego cualquier vértice f que pueda ser agregado deberá tener un peso menor que alguno de los otros (digamos e) con los cuales forma un ciclo. Luego $F - e + f$ sigue siendo un conjunto independiente, pero sería contradictorio con el hecho de haber agregado ya las aristas de pesos menores a f que conforman el ciclo. El resultado final es efectivamente un MST.

Nota. Dada la demostración del Teorema 1, cualquiera de las implementaciones que se deseen realizar en un grafo dado, son equivalentes para el resultado de la base de peso mínimo encontrada.

2. Contracción de una matroide.

Sea $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, \mathcal{I})$ una matroide. A continuación veremos una propiedad curiosa de este tipo de estructuras, que tiene una analogía a lo que sucede en espacios vectoriales cuando tenemos un plano y un conjunto que no pertenece al plano. Si queremos que el conjunto sea independiente del plano, entonces dará lo mismo cual base del plano tomemos para verificar independencia, ya que si el conjunto es independiente con una, lo será también con todas las demás.

Proposición 1. *Sean B y B' bases de $X \subseteq S$, entonces para todo conjunto $Y \subseteq S \setminus X$ se tiene que*

$$B \cup Y \in \mathcal{I} \iff B' \cup Y \in \mathcal{I}. \tag{1}$$

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos $B \cup Y \in \mathcal{I}$. Como $B' \in \mathcal{I}$, se puede extender a una base de $B' \cup Y$, a la que llamaremos $D = B' \cup Z$, con $Z \subseteq Y$. Si se tiene que $Z \neq Y$, entonces $|Z| < |Y|$, lo que implica que $|D| = |B' \cup Z| < |B' \cup Y| = |B \cup Y|$, puesto que B y B' son disjuntos de Y, y tienen el mismo cardinal al ser bases de X. Como D también es base de un conjunto, es indepediente, así que tenemos D y $B \cup Y$ dos independientes de distinto cardinal, $|D| < |B \cup Y|$, y como $(\mathcal{S}, \mathcal{I})$ es una matroide, satisface la propiedad de aumento.

Usando esta propiedad, tenemos que existe un elemento $w \in B \cup Y \setminus D = B \cup Y \setminus (B' \cup Z)$ tal que si se lo agregamos a D, el conjunto resultante sigue siendo un indepediente. Notemos que este w no puede estar en Y, ya que si lo estuviera, entonces tendríamos que $B' \cup Z + e \in \mathcal{I}$, y $B' \cup Z \subset B' \cup Z + e \subseteq B' \cup Y$, por lo tanto $B' \cup Z$ no sería base de $B' \cup Y$ y caeríamos en una contradicción. Por esto, w debe estar en $B \setminus B'$, y con ello está en X, pero notemos que si $B' \cup Z + w$ es indepediente, entonces $B + e$ también lo es, pues es su subconjunto.

Con lo anterior, nuevamente llegamos a una contradicción, pues $B' \subset B' + w \subseteq X$ y B' es base de X, con lo que $B' + w$ no puede ser independiente. Finalmente, se concluye que $Z = Y$, y por lo tanto $B' \cup Y \in \mathcal{I}$.

$\Leftarrow$) Esta implicancia es análoga a la ya demostrada, intercambiando B y B'. $\square$

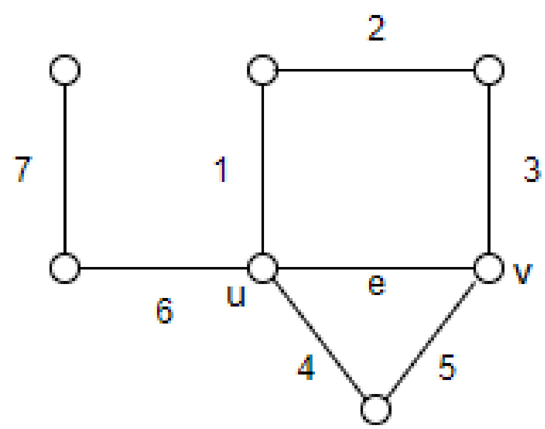
Esta propiedad nos permite introducir un nuevo concepto relacionado con matroides.

Definición 2. Sea $X \subseteq S$. Se define la contracción de la matroide $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, \mathcal{I})$ como $\mathcal{M}/X := (S \backslash X, \mathcal{I}/X)$, donde $\mathcal{I}/X$ se define como $\{Y \subseteq S \setminus X : Y \cup B \in Y\}$

Gracias a la propiedad demostrada anteriormente, se tiene que $\mathcal{I}/X$ es independiente de la base B elegida.

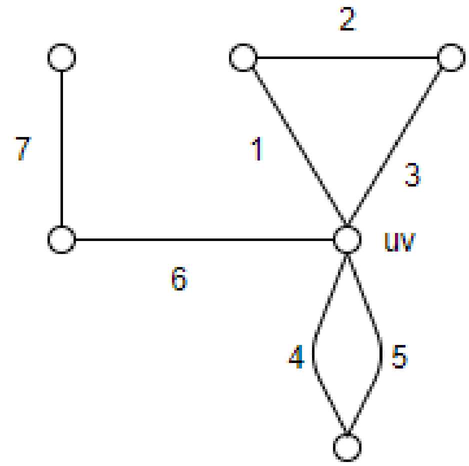
Proposición 2. *La contracción $\mathcal{M}/X$ también es una matroide, y su función de rango r' satisface que $r'(Y) = r(Y \cup X) - r(X), \forall Y \subseteq S \backslash X$.*

Ejemplo 1. *Matroide gráfica. $\mathcal{M}(G) = (E(G),$ acíclicos)*



Tomando como E=$\{e, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ posicionados como se ilustra en la figura, y u,v vértices del grafo, se tiene que $\mathcal{I}/\{e\} = \{F \subseteq G - e : F + e \text{ es acíclico}\}$. Con esto se tiene que $\mathcal{M}/\{e\} = (E - e, \mathcal{I}/\{e\})$ es la contracción de M a $\{e\}$.

Una de las propiedades que tiene la contracción de una matroide gráfica, es que se puede definir el grafo contraído, en este caso $G/\{e\}$, en el cual los dos extremos de una arista contraída se grafican como un sólo vértice.



Esto permite relacionar los acíclicos de ambos grafos: sea $X \subseteq E - e$, entonces X es acíclico en G/e ssi $X + e$ es acíclico en G.

Con esto podemos notar que $\{1, 2, 3\} \notin \mathcal{I}/\{e\}$ y que $\{1, 4\} \in \mathcal{I}/\{e\}$.

3. Matroide dual.

Para cerrar el tema de matroides en esta parte del curso (se retomará más adelante), se introducirá el concepto de dualidad en una matroide.

El dual de una matroide se puede definir de distintas maneras, todas equivalentes, pero para nuestros própositos se hará con la más sencilla, en función de sus bases.

Definición 3. Sea $\mathcal{M}$=($\mathcal{S}$,$\mathcal{I}$) una matroide. Se define su dual $\mathcal{M}^*$ como aquel cuyas bases son los complementos de las bases de $\mathcal{M}$.

Proposición 3. *El dual $\mathcal{M}^*$ de una matroide, es también una matroide.*

Demostración. Para probar que es una matroide se usará la caracterización de que las bases deben ser un clutter no vacío que satisface la propiedad de intercambio.

Primero, veamos que las bases de $\mathcal{M}^*$ son un clutter. Sean P^c y Q^c bases de $\mathcal{M}^*$ tales que $P^c \subseteq Q^c$, con ello, P y Q son bases de $\mathcal{M}$, y $Q \subseteq P$, pero las bases de $\mathcal{M}$ son un clutter pues es matroide, por lo tanto, esto implica que $P = Q$, luego $P^c = Q^c$. Así, el conjunto de las bases de $\mathcal{M}^*$ es un clutter.

Es un clutter no vacío, pues para que $\mathcal{M}$ sea matroide debe tener al menos una base P, luego P^c pertenece a $\mathcal{M}^*$, y con ello, el conjunto de sus bases es no vacío.

Ahora, comprobemos que las bases de $\mathcal{M}^*$ satisfacen la propiedad de intercambio. En efecto, sean P^c y Q^c bases de $\mathcal{M}^*$, y $e \in P^c \setminus Q^c$, y notemos que $P^c \setminus Q^c = Q \setminus P$, por lo tanto $e \in Q \setminus P$. Como P, Q son bases de $\mathcal{M}$ matroide, satisfacen la propiedad de intercambio negativo, y con ello existe $f \in P \setminus Q$ tal que $P + e - f$ es base de $\mathcal{M}$. Basta notar que $P \setminus Q = Q^c \setminus P^c$ y $(P + e - f)^c = P^c - e + f$, con lo que se tiene que existe $f \in Q^c \setminus P^c$ tal que $P^c - e + f$ es base de $\mathcal{M}^*$. Así, las bases de $\mathcal{M}^*$ satisfacen la propiedad de intercambio, por lo tanto se concluye que es una matroide. □

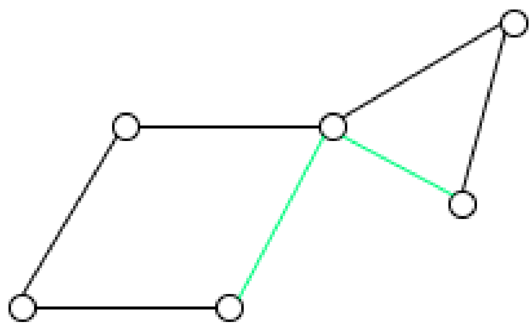
En general, las matroides duales son más complicadas de ver que las matroides originales, así como también trabajar con ellas requiere mayor sutileza. Por este motivo, se introducirá nomenclatura que nos servirá para simplificar el trabajo con ellas.

Nomenclatura. Si $\mathcal{M}$ es matroide, entonces llamaremos coindependientes, cobases, cocircuitos, corango y cospan a los equivalentes en su matroide dual $\mathcal{M}^*$.

Ejemplo 2. *Matroide gráfica $\mathcal{M}(G)$ de un grafo G conexo.*
En una matroide gráfica de un grafo conexo, sus bases son los árboles generadores, por lo tanto los complementos de estos son las bases de su matroide dual $\mathcal{M}^*(G)$, es decir, son las cobases.

Además, podemos encontrar una caracterización para sus coindependientes. Si X es coindependiente, por definición es independiente en $\mathcal{M}^*(G)$, lo que quiere decir que es subconjunto de una base B^c de $\mathcal{M}^*(G)$. Como las bases de la matroide dual son los complementos de las bases de la matroide original, equivale a que existe una base B de $\mathcal{M}(G)$ tal que $X \subseteq B^c$, pero las bases de esta matroide son los árboles generadores, por lo tanto, que X sea coindependiente es equivalente a que exista un árbol generador B tal que $B \subseteq X^c$, pero esta última expresión es una de las caracterizaciones de ser conexo. Así, podemos concluir que en una matroide gráfica de una grafo conexo, X es coindependiente ssi X^c es conexo.

A continuación, se muestra un grafo conexo, en el cual las aristas verdes son coindependientes, pues su complemento (es decir, el grafo que resulta al quitarlas) es conexo.



Un problema que hemos estudiado en el curso es el de encontrar una base de peso mínimo de un grafo conexo G, para lo cual vimos que el algoritmo de Kruskal es una forma de encontrarla. Se puede demostrar que las bases de peso mínimo son complementos de las cobases de peso máximo, por lo tanto el concepto de matroide dual nos permite trabajar en la solución de este problema, encontrando una cobase de peso máximo y luego complementándola.

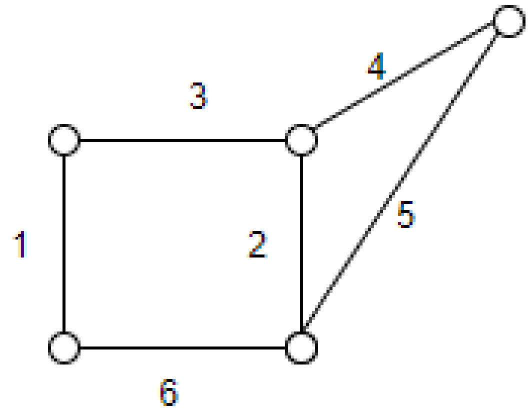
Sin embargo, no es necesario esperar hasta el final del proceso para complementar la base, sino que se puede partir con el conjunto completo de aristas, ordenarlas de mayor a menor peso, y en cada iteración ir analizándolas en ese orden, y eliminándolas siempre y cuando el grafo que resulte siga siendo conexo. Bajo esta idea se implementa el algoritmo de Kruskal reverso, el cual se ilustra a continuación:

Algorithm 3: Kruskal Reverso

Entrada: $G = (V, E)$ conexo
Ordenar E como $e_1, ..., e_m$ con $w(e_1) \geq w(e_2) \geq ... \geq w(e_m)$
$F \leftarrow E$
for *i de 1 a m* **do**
  if $F - e_i$ *es conexo* **then**
    $F \leftarrow F - e_i$
  end
end
return $T = (V, F)$

Ejemplo 3. *Algoritmo de Kruskal Reverso en un grafo conexo.*

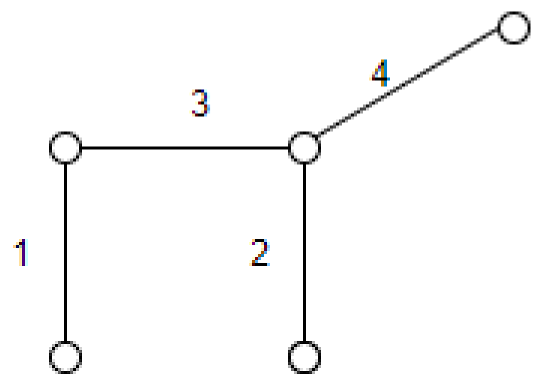
Sea $G = (V, E)$ el grafo conexo que se muestra a continuación, acompañado de los pesos de cada arista.



El algoritmo de Kruskal Reverso ordenará las aristas de mayor a menor peso, es decir, quedarán en el orden 6, 5, 4, 3, 2, 1. Luego, irá analizándolas en este orden, y verificará si el grafo resultante al eliminarlas queda conexo o no, y en caso de serlo, eliminará la arista respectiva.

Así, analizará primero 6, y la eliminará, pues el grafo $G - 6$ es conexo. Luego, analizará 5 y también la eliminará, por la misma razón. Seguirá analizando el resto, pero si se saca cualquiera de las aristas restantes el grafo será disconexo, por lo tanto, no eliminará ninguna más.

A continuación, se ilustra el grafo resultante, el cual corresponde a la base de menor peso del grafo G.



La correctitud de este algoritmo se basa, de la misma manera, en el algoritmo glotón y sabiendo que las bases de una matroide corresponden a los complementos de las co-bases presentadas en la sección presente, por tanto una mase de peso minimo, corresponderá a una co-base de peso máximo, utilizando de paso que ambas por ser matroides ($\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^*$) tienen que sus bases poseen el mismo cardinal.

4. Grafos dirigidos

Teniendo en cuenta las aplicaciones que posee el algoritmo glotón a la hora de encontrar bases maximales para ciertos criterios (por ejemplo los algoritmos de Kruskal y Kruskal reverso), ahora nos gustaría aplicar esta clase de algoritmos a digrafos (grafos dirigidos).

Definición 4. Diremos que un grafo $G = (V, E)$ es un digrafo simple, si no contiene loop o arcos paralelos. i.e. Si $u, v \in V$, tales que $e_1 = (u, v) \in E$, entonces $e_2 = (v, u), e_3 = (v, v), e_4 = (u, u)$ tal que $e_1 \neq e_2$, no pueden pertenecer a E.

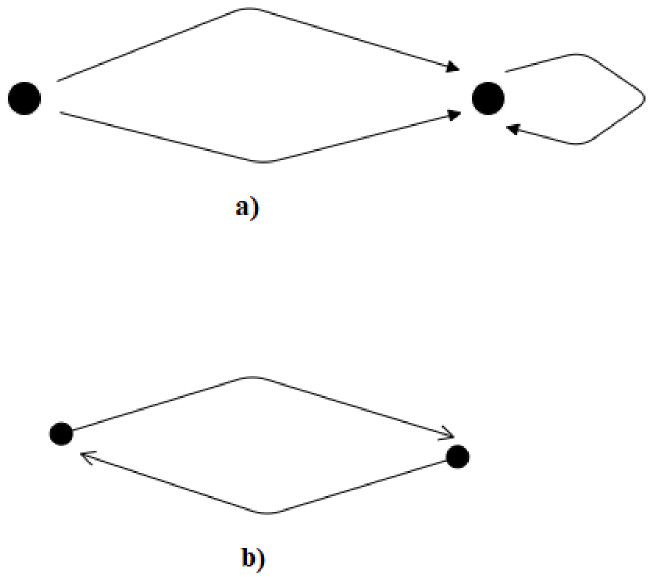


Figura 1: En los diagramas, a) corresponde a un digrafo no simple dado que posee arcos paralelos y loops, mientras que b) corresponde a un digrafo simple.

Recordatorio:

- Los elementos de V se denominan nodos
- Los de E se denominan arcos
- El extremos inicial de una arista $e = u.v$ se denomina cabeza $h(e) = u$
- El extremos final de una arista $e = u.v$ se denomina cabeza $t(e) = v$
- Se denomina $N^{-}(u)$ al conjunto de nodos vecinos incidentes al nodo u i.e. $v \in N^{-}(u) \iff \exists e \in E$ — $t(e) = u \wedge h(e) = v$
- Se denomina $N^{+}(u)$ al conjunto de nodos vecinos salientes del nodo u i.e. $v \in N^{+}(u) \iff \exists e \in E$ — $t(e) = v \wedge h(e) = h$

Con esta notación, cada arco $e \in E$ puede ser interpretado como un par ordenado. También $N^{-}(u)$ y $N^{+}(u)$ pueden ser denotados como $N^{in}(u)$ y $N^{out}(u)$ respectivamente.

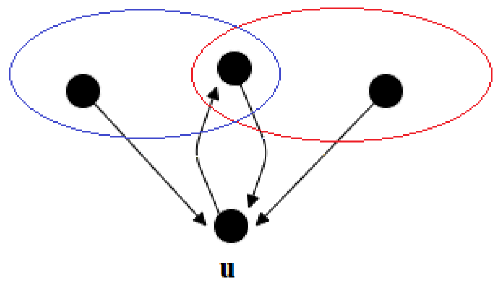


Figura 2: En el diagrama, los nodos encerrados en azul corresponden al conjunto $N^{-}(u)$ mientras quelos encerrados en rojo corresponden a $N^{+}(u)$.

Nota. Si bien la notación permite la existencia de loops de la forma $(a, a) \in E$, para cierto nodo $a \in V$, no los utilizaremos a menos que se diga explícitamente.

De los grafos simples, heredaremos las mismas nociones de paseos, caminos y senderos, pero exigiremos que la orientación de los arcos se mantenga i.e. Si $G = (V, E)$ con $V = u, v, w$ y $|E| = 2$ tales que (u, v) y (v, w) en E, entonces hay un camino que va de u hasta w, pero si $(v, w) \notin E$, $(w, v) \in E$, entonces no hay un paseo de u hasta w.

Ahora los paseos pueden ser enlistados según el orden en que se visitan los nodos sin necesidad de que hayan abusos de notación.

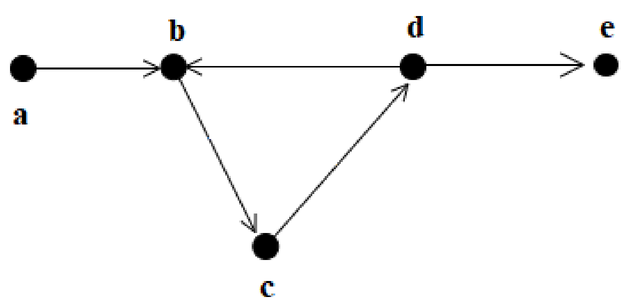


Figura 3: Para el diagrama, $W_1 = abcde$ y $W_2 = abcdbcde$ corresponden a ejemplos de paseos dirigidos del digrafo, mientras que $W_3 = abdc$ no es un paseo dirigido aceptable, dada la orientación que poseen los arcos.

4.1. Paseos de largo mínimo

Definición 5. Definamos una función de largo $\ell : E \to R$ como una función aditiva que a cada arco le asocia un valor fijo. Esta función al definirla de manera aditiva, es posible extenderla a paseos de la forma $W = v_1 v_2 v_3 ... v_n$ de forma que la función de largo aplicada al paseo será $\ell(W) = \sum_{k=1}^{n-1} \ell(v_k v_{k+1})$.

Preguntas naturales que surgen bajo la noción de grafo dirigido junto con la función de largo, dados un digrafo G, una función de largo ℓ y dos nodos $s, t \in V$ son:

- Determinar si existe un paseo dirigido que conecte dos nodos $s, t \in V$.
- Hayar el paseo con el menor número de arcos que conecte dos nodos $s, t \in V$. i.e. $\ell(ab) = 1 \ \forall a, b \in V$.
- Hayar el paseo dirigido de menor largo que conecte dos nodos $s, t \in V$ con un número fijo de arcos k.
- Encontrar el camino dirigido de largo mínimo entre dos nodos $s, t \in V$.

Nota. Si la función de largo es positiva $\ell(e) > 0 \ \forall e \in E$, la última inquietud es posible resolverla. Se verá más adelante que significa que una pregunta sea fácil o difícil de contestar.

Definición 6. Denotaremos como $\mathcal{W}_{=k}(s, t)$ al conjnto de paseos dirigidos que van del nodo s al nodo t en exactamente k arcos.

Definición 7. Dada una función de largo $\ell : E \to R$, definiremos la distancia entre s y t como $D(s, t; k) = min\{\ell(W) : W \in \mathcal{W}_{=k}(s, t)\}$

Nota. Si se toma mínimo sobre un conjnto vacío, se acepta la convención que $min\{\emptyset\} = \infty$.

Teorema 2. *Si $W \in \mathcal{W}_{=k}(s, t)$ es el paseo de largo mínimo que conecta los nodos s y t, y vt es el último arco del paseo $W \Rightarrow W - vt \in \mathcal{W}_{=k-1}(s, v)$ y es paseo de largo mínimo que conecta s y v.*