Clase 13 MA3705. 30 de octubre 2020.

$O(n(n+m))$

Tabla

- Aspectos finales de largos conservativos
- Emparejamientos de cardinalidad máxima.

Aspectos finales de largos conservativos

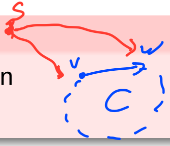
¿Cómo determinar si hay ciclos negativos?

Sea $G = (V, E)$ grafo dirigido, ℓ función de largos en E.
Bellman-Ford calcula para todo $t \in V$,
$d_{\leq n-1}(s,t) = \min\{\ell(P)\colon$ s–t paseo de largo mínimo, con $\leq n-1$ arcos$\}$
En auxiliar se probó que

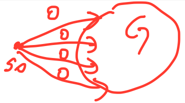
↳ camino si ℓ fuera conservativos.

Lema

Existe ciclo de largo negativo alcanzable desde s ssi existe $vw \in E$ con $d_{\leq n-1}(s,w) > d_{\leq n-1}(s,v) + \ell(vw)$.



Para determinar si existe ciclo negativo en todo el grafo basta ...



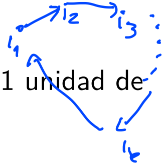
$O(n(n+m))$

Problema presentable: ¿Cómo modificar BF para que entregue la lista de nodos de un ciclo negativo?

Ejemplo

Una casa de cambios ofrece tasas $r_{ij} > 0$ para cambiar de un tipo de monedas i a un tipo de monedas j (es decir 1 unidad de moneda i es igual a r_{ij} unidades de moneda j).

Arbitraje: Secuencia $i_1, \ldots, i_k$ tal que $r_{i_1 i_2} \cdot \ldots r_{i_{k-1}} r_{i_k} \cdot r_{i_k i_1} > 1$
(significa que podemos invertir 1 unidad de moneda i_1 y recuperar más que 1 unidad de moneda i_1 solo cambiando)



$$\ell(ij) := -\log(r_{ij})$$

¿Cómo detectar si existe arbitraje?

$$r_{i_1 i_2} \cdot r_{i_2 i_3} \cdot \ldots \cdot r_{i_k i_1} > 1 \iff$$

$$\log(r_{i_1 i_2}) + \log(r_{i_2 i_3}) + \ldots + \log(r_{i_k i_1}) > 0$$

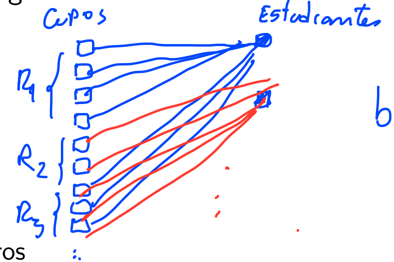
$$\iff \ell(i_1 i_2) + \ldots + \ell(i_k i_1) < 0.$$

Emparejamientos de cardinalidad máxima

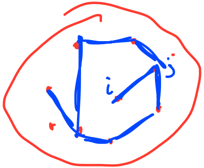
Matching (emparejamientos)

Sea $G = (V, E)$ grafo (simple).

1. $M \subseteq E$ es un matching si $\forall e, f \in M, e \neq f$, e y f no comparten vértices. Equivalentemente, $\deg_M(v) \leq 1$, $\forall v \in V$.
2. Problema: Encontrar matchings de cardinalidad máxima.
   Ejemplos:
   1. Asignación de *cupos* de ramos a estudiantes.
   2. Problema de los compañeros de cuarto (roommates).



bipartitos



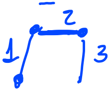
vertices : personal

general.

Dificultad

El sistema $(E, \text{matchings})$ no es una matroide. Luego ... Glotón no sirve

Ej:



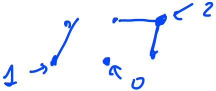
$\{2\}$

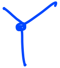
$\{1,3\}$

bases con ~~tam~~ distinto tamaño

$$\boxed{\begin{array}{l} M \\ \Downarrow \\ \text{construir } M' \text{ con } |M'| = |M| + 1 \end{array}}$$

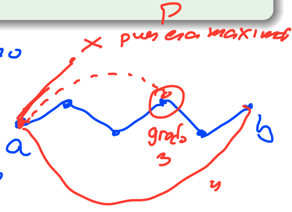
Paréntesis: Un lema extremadamente útil





Lema

Si G es un grafo con $\deg_G(v) \leq 2$, $\forall v \in V$, entonces las componentes conexas de G son ciclos y caminos.



Dem: Sea C componente. Si $|C|=1$ (un vértice) $\to$ es camino

Si no, tiene alguna arista.

Sea P camino lo más largo posible dentro de C

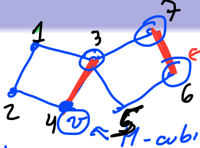
· Si $\deg_G(a)=2 \Rightarrow ab \in E$. $P+ab$ es ciclo es exactamente la componente

· Si $\deg_G(a)=1$, $\deg_G(b)=1$ P es exactamente la componente.

$\square$

12 es aumentan- 2 4 3 1

Grafo



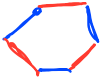
1 M.

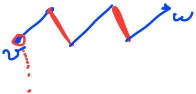
Sea $G = (V, E)$ grafo, $M \subseteq E$ matching.

1. $v \in V$ es M-cubierto si ... existe arista $e \in M$ que la cubre
2. $v \in V$ es M-expuesto si ... no es M-cubierto.
3. Un camino/paseo/ciclo $X = e_1 e_2 e_3 \dots e_k$ ($\in E$) es M-alternante si ... $\forall i \; e_i \in M \Leftrightarrow e_{i+1} \notin M$
   $\in [k-1]$ (ciclos, $[k]$)
4. Un camino P es M-aumentante si es M-~~aumentante~~ alternante y además sus vértices (extremos) son M-expuestos. En particular:

$$|P \setminus M| = |P \cap M| + 1 .$$

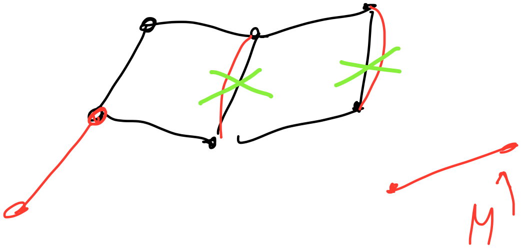
ciclo alternante





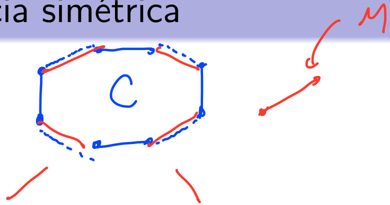
Sea M matching, $F \subseteq E$ ¿Qué es $F' = F \Delta M$?
Son las aristas...

F

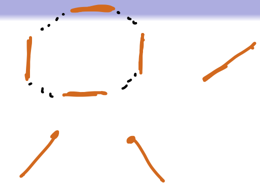


Poder de la diferencia simétrica

e_1 e_2 no es ciclo alternante.

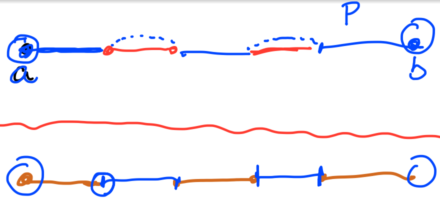


$M' = M \Delta C$



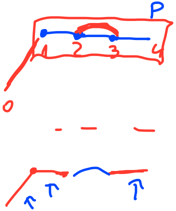
Si C es ciclo M-alternante entonces $M\Delta C$ es matching y $|M\Delta C| = |M|$

Si P es camino M-aumentante entonces $M\Delta P$ es matching y $|M\Delta P| = |M| + 1$ Aumentan



antes

$M' = M \Delta P$



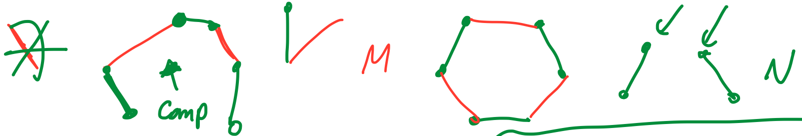
Teorema (1931 König) Sea M matching.

Un matching M no es de cardinalidad máxima si y solo si $\exists$ camino M-aumentante. $\boxtimes$

$\Leftarrow$] Si $\exists$ camino M-aumentante P. $\Rightarrow$ $M \Delta P$ es matching más grande que M $\boxtimes$

$\Rightarrow$] Sea N un matching con $|N| > |M|$.

$|N \setminus M| > |M \setminus N|$



Sea $F = N \Delta M$. $\deg_{N\Delta M}(v) \leq 2$

Componentes
Ciclos

= M	N

v

(V, F) tiene grado máximo ≤ 2.
sus componentes son caminos y ciclos M-alternante

$\boxtimes$

No es trivial determinar si existe camino M-aumentante

Idea de un algoritmo.

- Partir de un matching M
- Buscar camino M-aumentante P
- Si lo encuentro. $M \leftarrow M \Delta P$
- Si no lo encuentro ???

¿Cómo certifico que no hay caminos M-aumentantes?